习　题　5.2　L'Hospital 法则

1.　对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则。

证　设 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists\delta>0,\forall x\in(a,a+\delta),\frac{f'(x)}{g'(x)}>G+1$。

首先考虑 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 的情况，补充定义 $f(0)=g(0)=0$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,d]$ 连续，满足 Cauchy 中值定理条件。当 $x\in(a,a+\delta)$ 时

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>G,\quad a<\xi<x<a+\delta，$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty。$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$ 的情况，任取 $x_0\in(a,a+\delta)$，再取 $0<\delta_1<x_0-a$，使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$\max\{|\frac{g(x_0)}{g(x)}|,|\frac{f(x_0)}{g(x)}|\}\le\frac{1}{2}$，于是由

$$\frac{f(x)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}=[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}]\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}，$$

可得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时

$$|\frac{f(x)}{g(x)}|\ge\frac{1}{2}(G+1)-\frac{1}{2}=\frac{G}{2}，$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty。$$

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$ 的情况即为 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{-f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，所以 L'Hospital 法则也成立。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$；

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$；

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$；

(20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(-e^{-x})}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$。

（2）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$。

（3）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi-2x)(-2)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-4(-2)}=-\dfrac{1}{8}$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{m}{n}x^{m-n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$。

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\cot 7x\sec^2 7x\cdot 7}{\cot 2x\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{7\sin 2x\cos 2x}{2\sin 7x\cos 7x}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{7\sin 4x}{2\sin 14x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{28\cos 4x}{28\cos 14x}=1$。

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 3x}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}=\frac{1}{3}$。

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arc}\cot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[\ln(1+x)]'-(\ln x)'}{-\frac{1}{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-x^2)[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x(1+x)}=1$。

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$。

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{2x}\right)\cdot 1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$。

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1$。

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}\cdot 1=\frac{2}{3}\text{。}$$

（13） $\lim_{x\to 0} x\cot 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 2x}\cdot 1=\frac{1}{2}$。

（14） $\lim_{x\to 0} x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}=\lim_{y\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{1}=+\infty$。

（15） $\lim_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=\lim_{x\to \pi}\frac{(\pi-x)}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to \pi}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to \pi}\frac{-1}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\cdot 1=2$。

（16） $\lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}\text{，}$$

所以

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}\text{。}$$

（17） $\lim_{x\to 0+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(-\frac{1}{x})}{(-\csc^2 x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x}=0$，

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1\text{。}$$

（18） $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}$，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（19） $\lim_{x\to 0+}\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(-\ln x)}{\csc x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{(-\ln x)(-x)}}{(-\csc x)(\cot x)}$

$$=\lim_{x\to 0+}(-\frac{\sin x}{x})(\frac{\tan x}{\ln x})=0,\quad (\lim_{x\to 0+}\frac{\tan x}{\ln x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\tan x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\cos^2 x}=0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1。$$

（20） $\lim_{x\to 1}\ln(x^{\frac{1}{1-x}})=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{(-1)}=-1$，

所以

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}。$$

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；

(2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$；

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$.

解（1）因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 极限不存在，所以

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})\cdot\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=1\cdot 0=0$，极限存在。

（2）因为当 $x\to +\infty$ 时，$\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在，所以 $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 不能用 L'Hospital 法则求极限。

事实上，$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1$，极限存在。

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)\sin x}{\lim\limits_{x\to 1}\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{2\sin 1}{\ln 2}$。

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限。事实上，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x})}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\dfrac{1+e^2}{1}=1+e^2$。

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中$g(0)=0$，$g'(0)=0$，$g''(0)=10$。求$f'(0)$。

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{2(x-0)}=\dfrac{1}{2}g''(0)=5$。

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leq 0,\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性。

解 显然函数$f(x)$在$x=0$处左连续。下面考虑$f(x)$在$x=0$处的右连续性。当$x>0$时，

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln e\right]=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},$$

于是

$$\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

由对数函数的连续性，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续。

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

6．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{f(x)}=1$。

证 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x^{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0+}[f(x)\ln x]=\lim\limits_{x\to 0+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]=f'(0)\cdot 0=0$，

所以

$$\lim_{x\to 0+} x^{f(x)}=e^0=1。$$

7．设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$。

证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$。