习　　题 7.3

1. 设函数 $f(x)$ 连续，求下列函数 $F(x)$ 的导数：

(1) $F(x)=\int_x^b f(t)dt$；　　(2) $F(x)=\int_a^{\ln x} f(t)dt$；

(3) $F(x)=\int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)} \frac{1}{1+t^2}dt$.

解 (1) $F(x)=-\int_b^x f(t)dt$，所以 $F'(x)=-f(x)$。

(2) $F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x}f(\ln x)$。

(3) $F'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)^2}\cdot\sin^2 x=\dfrac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$　。

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}dw}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}=2e$。

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}(\arctan x)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$。

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$。

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x)>0$，证明 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\, f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$

是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

证　因为

$$g'(x)=\frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\right)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\geq 0,$$

所以 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\, f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

4. 求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值。

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)^2$，令 $f'(x)=0$，得到 $x=1,2$。因为当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x<2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $x=1$ 是极小值点，$x=2$ 不是极值点。由

$$f(1)=\int_0^1[(t-2)^3+(t-2)^2]dt=-\frac{17}{12},$$

可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\dfrac{17}{12}$。

5 利用中值定理求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dt$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\,dt$　（$p\in\mathbf{N}$）。

解（1）由积分第一中值定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}=0\quad (0\leq\xi\leq 1)。$$

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\xi\in[n,n+p]$，使得 $\left|\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx\right|=\left|\dfrac{\sin\xi}{\xi}p\right|\leq\dfrac{p}{n}$，

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dt=0。$$

6. 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2dx$；　(2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx$；

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2dx$；　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$；　(6) $\int_0^1 \arcsin x dx$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$；　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x\, dx$；　(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\, dx$；

(11) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arc}\tan x dx$；　(12) $\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2\ln(x-1)dx$。

(13) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$；　(14) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}\, dx$；

(15) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$；　(16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(17) $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$；　(18) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；

(19) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；　(20) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$；

解　(1) $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2dx = \int_0^1 (4x^2-4x^4+x^6)dx = \frac{4}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$。

(2) $\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx = \int_1^2 (\frac{x}{2}-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})dx = \ln 2-\frac{1}{2}$。

(3) $\int_0^2 (2^x+3^x)^2dx = \int_0^2 (4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx = \frac{15}{\ln 4}+\frac{70}{\ln 6}+\frac{40}{\ln 3}$。

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}dx = -\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^{10} d(1-4x^2) = -\frac{1}{88}(1-4x^2)^{11}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{88}$。

(5) $\int_{-1}^1 \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d(x+1)^2}{[(x+1)^2+4]^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+5)}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{16}$。

(6) $\int_0^1 \arcsin x dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}-1$。

（7）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=0$。（奇函数在对称区间上的积分为零）

（8）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$。

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(1-\cos 2x)dx$，由

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2xdx=e^x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2xdx=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2xdx$，

得到$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2xdx=-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)+\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{10}=\frac{3e^{\frac{\pi}{2}}-2}{5}。$$

（10）$\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e\cos(\ln x)dx$

$=e(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)dx$,

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)dx=\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}。$$

（11）$\int_0^1 x^2\arctan xdx=\frac{1}{3}x^3\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\int_0^1(x-\frac{x}{1+x^2})dx$

$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2)=\frac{\pi}{12}+\frac{\ln 2-1}{6}$。

（12）$\int x^2\ln(x-1)dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x-1)-\frac{1}{3}\int(x^2+x+1+\frac{1}{x-1})dx$

$=\frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right)+c$,

所以

$$\int_1^{\mathrm{e}+1}x^2\ln(x-1)dx=\frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1)\Big|_1^{e+1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_1^{e+1}=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{2}e^2。$$

（13）$\int_0^{\sqrt{\ln 2}}x^3\mathrm{e}^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\mathrm{e}^{-x^2}dx^2$

$=-\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}}=\frac{1-\ln 2}{4}$。

（14）令$t=\sqrt{x+1}$,则$x=t^2-1$，于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}dx=2\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}tdt=te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}dt=e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}e^2 \text{。}$$

（15）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}})\Big|_0^1=\ln\frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}$

$$=\ln(\sqrt{1+e^2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1\text{。}$$

（16） 令 $x=\sin t$，则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos^2 t}=2\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{。}$$

（17）令$t=\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $x=\dfrac{1+t}{1-t},dx=\dfrac{2dt}{(1-t)^2}$，于是

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_{-1}^0\frac{2t^4}{(1-t)^2}dt=2\int_{-1}^0\left(t^2+2t+3-\frac{4}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3+t^2+3t+4\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{-1}^0=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

注：本题也可令$t=x+1$，得到

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\int_1^2\frac{(t-2)^4}{t^4}dt=\frac{17}{3}-8\ln 2\text{。}$$

（18） $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

（19）$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}}=-\ln(x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}})\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$。

（20） $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$=-\int_0^1\frac{2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx-\int_0^1\frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}}+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}dt-2\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-2+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi-2。$$

注：本题也可令 $x=1+\sin t$，得到

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\sin t)^2dt=\frac{3}{4}\pi-2。$$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$。

解 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$。

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^pdx=\frac{1}{p+1}$。

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i}{n}\pi\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}$。

8. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\,dx$;

(3) $\int_0^a(a^2-x^2)^n\,dx$;　　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}dx$;

(5) $\int_0^1 x^n\ln^m xdx$;　　(6) $\int_1^e x\ln^n xdx$.

解 (1) $\int_0^{\pi}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx$，

在第二个积分中，令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n(\pi-t)dt=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt，$$

所以当 n 为奇数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=0$;

当n为偶数时，$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\pi$。

（2）当n为奇数时，显然$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx=0$；

当n为偶数时，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx\text{，}$$

在积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx$中，令$t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt\text{，}$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}2\pi\text{。}$$

（3）令$x=a\sin t$，则

$$\int_0^a(a^2-x^2)^n dx=a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}tdt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+!}\text{。}$$

（4）令$x=\dfrac{1}{2}\sin t$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^{21}tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{21}t-\cos^{23}t)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{20!!}{21!!}-\frac{22!!}{23!!}\right)=\frac{1}{184}\frac{20!!}{21!!}\text{。}$$

（5）$\int_0^1 x^n\ln^m xdx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x\Big|_0^1-\dfrac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}xdx$

$$=-\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}xdx=\cdots=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n dx=(-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}\text{。}$$

（6）$\int_1^e x\ln^n x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_1^e-\dfrac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1}x\,dx=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1}x\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{n-1}{2}\int_1^e x\ln^{n-2}x\,dx\right)=\cdots$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}]+(-1)^n\frac{n!}{2^n}\int_1^e xdx$$

$$=\frac{e^2}{2}[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2^2}-\cdots+(-1)^{n}\frac{n!}{2^{n+1}}]+(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}\text{。}$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$。

证（1）令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\text{。}$$

（2）令 $t=\pi-x$，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx\text{，}$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx\text{。}$$

10. 利用上题结果计算：

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）$\int_0^{\pi} x\sin^4 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3}{16}\pi^2$。

（2）$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi^2$。

（3）$\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2\text{。}$$

11. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{6} x^2[x]\,dx$；

(2) $\int_0^{2}\operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$；

(3) $\int_0^1 x|x-a|dx$;　　　　(4) $\int_0^2 [e^x]dx$.

解（1） $\int_0^6 x^2[x]dx=\int_1^2 x^2dx+2\int_2^3 x^2dx+3\int_3^4 x^2dx+4\int_4^5 x^2dx+5\int_5^6 x^2dx=285$。

（2） $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx=\int_0^1 1dx+\int_1^2(-1)dx=0$。

（3）当 $a\le 0$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^1 x(x-a)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\text{；}$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\text{；}$$

当 $a\ge 1$ 时，

$$\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx=\int_0^1 x(a-x)dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\text{。}$$

（4） $$\int_0^2\ [e^x]dx=\int_0^{\ln 2}\ 1dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\ 2dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4}\ 3dx+\int_{\ln 4}^{\ln 5}\ 4dx$$

$$+\int_{\ln 5}^{\ln 6}\ 5dx+\int_{\ln 6}^{\ln 7}\ 6dx+\int_{\ln 7}^{2}\ 7dx$$

$$=14-\ln(7!)\text{。}$$

12．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且关于 $x=T$ 对称，这里 $a<T<b$。则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+2\int_T^b f(x)dx\text{。}$$

并给出它的几何解释。

证 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+\int_{2T-b}^{T} f(x)dx+\int_T^b f(x)dx$，

由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以 $f(2T-x)=f(x)$，于是，令 $x=2T-t$，则

$$\int_{2T-b}^{T} f(x)dx=-\int_b^T f(2T-t)dt=\int_T^b f(2T-t)dt=\int_T^b f(t)dt=\int_T^b f(x)dx\text{，}$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{2T-b} f(x)dx+2\int_T^b f(x)dx\text{。}$$

从几何上说，由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称，所以积分 $\int_{2T-b}^{T} f(x)dx$ 与积分 $\int_T^b f(x)dx$ 表示的是相同的面积，从而上述等式成立。

13．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0. \end{cases}$ 计算$I=\int_1^4 f(x-2)dx$。

解　令$t=x-2$，则

$$I=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$$

$$=-\int_{-1}^0\frac{d(e^{-t}+1)}{e^{-t}+1}+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}dt^2=\ln\frac{e+1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-4})\text{。}$$

14．设函数$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2g(t)dt$，其中函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算$f''(1)$和$f'''(1)$。

解　$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x^2-2xt+t^2)g(t)dt=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^x t^2g(t)dt$，

等式两边求导，得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{2}x^2g(x)-(\int_0^x tg(t)dt+x^2g(x))+\frac{1}{2}x^2g(x)$$

$$=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt\text{。}$$

再求导，得到$f''(x)=\int_0^x g(t)dt,\ f'''(x)=g(x)$，所以

$$f''(1)=2\text{，}\quad f'''(1)=5\text{。}$$

15．设$(0,+\infty)$上的连续函数$f(x)$满足$f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求$\int_1^e f(x)dx$。

解　记$\int_1^e f(x)dx=a$，则　$f(x)=\ln x-a$，于是

$$a=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\ln xdx-a(e-1)\text{，}$$

所以

$$a=\frac{1}{e}\int_1^e\ln xdx=\frac{1}{e}\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{e}\text{。}$$

16．设函数$f(x)$连续，且$\int_0^1 tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$，$f(1)=1$。求$\int_1^2 f(x)dx$。

解 在$\int_0^1 tf(2x-t)dt$中，令$u=2x-t$，则

$$\int_0^1 tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^{2x-1}(2x-u)f(u)du\text{，}$$

于是

$$2x\int_{2x-1}^{2x} f(u)du - \int_{2x-1}^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2}\arctan(x^2)\text{，}$$

两边求导，得到

$$2\int_{2x-1}^{2x} f(u)du + 4x(f(2x) - f(2x-1)) - 2(2xf(2x) - (2x-1)f(2x-1)) = \frac{x}{1+x^4}\text{，}$$

将 $x=1, f(1)=1$代入上式，得到

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}\text{。}$$

17．求$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$，其中$n$为正整数。

解　首先有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin xdx = (4k+1)\pi\text{，}$$

$$\int_{)2k-1)\pi}^{2k\pi} x|\sin x|dx = -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x\sin xdx = (4k-1)\pi\text{。}$$

当$n=2m$时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}[(4k+1)+(4k+3)\pi] = 4m^2\pi\text{；}$$

当$n=2m+1$时，

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|dx\right) + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} x|\sin x|dx$$

$$= 4m^2\pi + (4m+1)\pi = (2m+1)^2\pi\text{。}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = n^2\pi\text{。}$$

18．设函数$S(x) = \int_0^x |\cos t|dt$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$。

解 设$n\pi < x \le (n+1)\pi$，n为正整数，则$\dfrac{x}{n} \to \pi \ (x \to +\infty)$。由于

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n\int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n \text{，} \quad 0 \le \int_{n\pi}^{x} |\cos x| dx \le \pi \text{，}$$

可知

$$\frac{2n}{x} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2n+\pi}{x} \text{，}$$

所以

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi} \text{。}$$

19．设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且对于任何$a > 0$有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt \equiv \text{常数，} \quad x \in (0,+\infty) \text{。}$$

证明：$f(x) = \dfrac{c}{x}$，$x \in (0,+\infty)$，其中c为常数。

证 在$g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt$两边关于$x$求导，得到

$$g'(x) = af(ax) - f(x) \equiv 0 \text{。}$$

取$x = 1$，则$f(a) = \dfrac{f(1)}{a}$，此式对任何$a > 0$都成立。记$c = f(1)$，就得到

$$f(x) = \frac{c}{x} \text{，} \quad x \in (0,+\infty) \text{。}$$

20．设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，证明

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx \text{。}$$

证 令$t = \dfrac{4}{x}$，则 $x = \dfrac{4}{t}, dx = -\dfrac{4}{t^2}dt$，于是

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = \int_4^1 f\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right) \frac{t(\ln 4 - \ln t)}{4} \left(-\frac{4}{t^2}\right)dt$$

$$= \int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln 4 - \ln x}{x} dx \text{，}$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} dx \text{。}$$

21．设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx\text{。}$$

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可设 $|f(\xi)|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$ 及

$|f(\eta)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|$，$\eta\in[a,b]$。于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx\text{。}$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\text{。}$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=\min_{a\le x\le b}|f(x)|+(\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|)\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx\text{。}$$

22．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du\text{。}$$

证　利用分部积分法，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du=\left(u\int_0^u f(x)dx\right)\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(u)(x-u)\,du\text{。}$$

注：本题也可令 $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，证明 $F'(x)\equiv 0$。

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right)\text{。}$$

证　将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a}{2}$ 展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2\text{，}\quad(0<\xi<a)\text{。}$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x) \ge f(\frac{a}{2}) + f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})。$$

对上述不等式两边从0到a积分，由于$\int_0^a (x-\frac{a}{2})dx = 0$，就得到

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

24. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f''(x) \le 0$，$x \in [0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

证　将$f(x)$在$x=\frac{1}{3}$展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x) = f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{3})^2，(0<\xi<1)。$$

由　$f''(x) \le 0$，得到$f(x) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$，$x \in [0,1]$，再用$x^2$替换$x$，

即得到

$$f(x^2) \le f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})。$$

对上述不等式两边从0到1积分，由于$\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})dx = 0$，就得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

25．设$f(x)$为$[0,2\pi]$上的单调减少函数，证明：对任何正整数n成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0。$$

证　$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx\right)$，

在$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$与$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx$中，分别令$x=\frac{2k\pi+t}{n}$与

$x=\frac{(2k+1)\pi+t}{n}$，得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{2k\pi+t}{n})\sin t dt，$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{(2k+1)\pi+t}{n})\sin t dt。$$

由于$f(x)$在$[0,2\pi]$上单调减少，$\sin t$在$[0,\pi]$上非负，所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right) - f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin t dt \ge 0。$$

26. 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$。证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1$，$\xi_2$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$。

证 证明一： 设$g(x) = \int_0^x f(t)dt,$， $h(x) = \int_0^x g(x)\sin x dx$，则

$$g(0) = g(\pi) = 0，$$

$$h(0) = 0，\quad h(\pi) = \int_0^{\pi} g(x)\sin x dx = -\int_0^{\pi} g(x) d\cos x$$

$$= -g(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0，$$

对 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用 Rolle 定理，可知存在 $\eta \in (0,\pi)$，使得 $h'(\eta) = g(\eta)\sin\eta = 0$，即 $g(\eta) = 0$，再在$[0,\eta]$和$[\eta,\pi]$上对 $g(x)$ 分别运用 Rolle 定理，可知$\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$，使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0。$$

证明二：用反证法。若不然，只有一个点$\xi \in (0,\pi)$，使得 $f(\xi) = 0$，由于 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，所以 $f(x)$ 在$(0,\xi)$和(ξ,π)上异号，不妨设在$(0,\xi)$中 $f(x) < 0$，在(ξ,π)中 $f(x) > 0$。

设 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$，则 $g(0) = g(\pi) = 0,\ g'(x) = f(x)$，可知$g(x)$在$(0,\xi)$中单调减少，而在$(\xi,\pi)$中单调增加，从而$g(x) \le 0, x \in [0,\pi]$。

另一方面，$g(x)$在$[0,\pi]$上不恒等于零（否则 $f(x)$ 恒为零与反证法假设矛盾），于是

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = \int_0^{\pi}\cos x dg(x) = g(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} g(x)\sin x dx = \int_0^{\pi} g(x)\sin x dx < 0，$$

与题设矛盾。