习　题　10.4　函数的幂级数展开

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开，并确定它们的收敛范围：

(1) $1+2x-3x^2+5x^3$ ，$x_0=1$;　　(2) $\dfrac{1}{x^2}$，　$x_0=-1$;

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}$，　$x_0=0$;　　(4) $\sin x$，　$x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x$ ，　$x_0=2$;　　(6) $\sqrt[3]{4-x^2}$，　$x_0=0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}$，　$x_0=1$;　　(8) $(1+x)\ln(1-x)$，　$x_0=0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，　$x_0=0$;　　(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}$，　$x_0=0$。

解（1）令 $x-1=t$，则

$$1+2x-3x^2+5x^3=1+2(t+1)-3(t+1)^2+5(t+1)^3$$

$$=5+11t+12t^2+5t^3=5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3。$$

因为级数只有有限项，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

（2）由 $\dfrac{-1}{x}=\dfrac{1}{1-(x+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$，应用逐项求导得到

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=-2$ 与 $x=0$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-2,0)$。

（3）
$$\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

（4）
$$\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin\frac{\pi}{6}\cos(x-\frac{\pi}{6})+\cos\frac{\pi}{6}\sin(x-\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n+1}。$$

级数的收敛半径为 $R=+\infty$，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

（5） $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$。

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=4$ 时，级数为 $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，收敛；当 $x=0$ 时，级数为 $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$，发散。所以收敛范围是 $D=(0,4]$。

（6） $\sqrt[3]{4-x^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{2n}$。

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=\pm 2$ 时，级数为 $\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，令 $u_n=(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3(n+1)}{3n-1}-1\right)=\frac{4}{3}>1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-2,2]$。

（7） $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{x-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n$。

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=3$ 与 $x=-1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,3)$。

（8） $(1+x)\ln(1-x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}x^n)=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^n$。

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-1,1)$。

（9） $$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{1}{n}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm 1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

（10） $$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n。$$

设级数的 x^n 项的系数为 a_n，则

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}<a_n<\frac{1}{2!}\quad(n\ge 4)，$$

所以级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm 1$ 时，级数的通项不趋于零，级数发散。所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

2. 求下列函数在 $x_0=0$ 的Taylor展开

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 至 x^4； (2) $\mathrm{e}^{\sin x}$ 至 x^4；

(3) $\ln\cos x$ 至 x^6； (4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至 x^4。

解 (1) $$\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)}$$

$$=1+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots。$$

(2) $$\mathrm{e}^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+\cdots$$

$$=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^3$$

$$+\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^4+\cdots=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots。$$

(3) $\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]=-(1-\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2-\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\cdots$

$$=-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^3-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{7}{240}x^6-\cdots。$$

(4) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{1+2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)}=1+(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$

$$-\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\cdots)^2+\frac{1}{2}(x+x^2+\cdots)^3-\frac{15}{24}(x+\cdots)^4$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots。$$

3. 利用幂级数展开，计算下列积分，要求精确到 0.001。

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1\cos x^2\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$。

解 (1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\,\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}$，由于 $u_3\approx 0.00003$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}\approx$$

(2) $\int_0^1\cos x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\,\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n)!(4n+1)}$，由于 $u_3\approx 0.0001$，因此前面 4 项之和的小数部分具

有三位有效数字，所以

$$\int_0^1 \cos x^2 \,\mathrm{d}\,x \approx \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} \approx$$

(3) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$，由于 $u_3 \approx 0.00016$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}\,x \approx \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} \approx$$

(4) $$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^3} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \int_2^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$，由于 $u_4 \approx 0.00004$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^3} \approx \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}} \approx$$

4. 应用 $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

证 $$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导，得到

$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

以 $x=1$ 代入，即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

5．求下列函数项级数的和函数

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$。

解 (1) 令 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n+1}$，应用逐项求导，得到

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t)=\ln(1+t),\quad f(t)=\int_0^t \ln(1+t)dt=(1+t)\ln(1+t)-t,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=(1+\frac{1}{t})\ln(1+t)-1,\quad t\in[-1,1]。$$

以 $t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$ 代入，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1,\quad x\in(-\infty,0]。$$

(2) 由级数乘法的 Cauchy 乘积，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x},$$

其中 $x\in(-1,1)$。

6．设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$b>1$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}$ 的和。

解 设 $a_n=c+(n-1)d$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}。$$

首先我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1}{b-1}$。设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}x^{n-2}$，则

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{b^n}=\frac{x}{b^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{b}}=\frac{x}{b(b-x)},$$

于是 $f(x)=\frac{1}{(b-x)^2}$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=f(1)=\frac{1}{(b-1)^2}。$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{c(b-1)+d}{(b-1)^2}。$$

7．利用幂级数展开，计算$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。

解 $$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^1(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

利用例题 10.4.6 中得到的结果$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，等式两边乘以$\frac{1}{4}$，得到

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$，两式相减，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

于是得到

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=-\frac{\pi^2}{8}。$$

8． (1) 应用$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$，计算π的值，要求精确到$10^{-4}$；

(2) 应用$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$，计算π的值，要求精确到$10^{-4}$。

解 (1) $$\pi=4(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]。$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设$u_n=\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)$，由于$u_7\approx 0.000038$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi\approx\sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]\approx 3.1416。$$

(2) $$\pi=6\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}。$$

设$u_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$，由于$\sum_{n=6}^{\infty}u_n<\frac{1}{13}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\approx 0.0000125$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi = 6\arcsin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{6}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} \approx 3.1416。$$

9．利用幂级数展开，计算$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx$的值，要求精确到$10^{-4}$。

解
$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx = \int_1^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!x^n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^3\frac{(-1)^n}{n!x^n}dx$$
$$= 2-\ln 3 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)。$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设$u_n = \frac{1}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$，由于$u_7 < 0.000033$，因此前面$8$项之和的小数部分具有四位有效数字，所以
$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx \approx 2-\ln 3 + \sum_{n=2}^{7}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) \approx$$

习　题 10.5　用多项式逼近连续函数

1. 求$f(x)=x^3$的Bernstein多项式$B_n(f,x)$。

解　$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}。$$

利用等式$\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_{n-1}^{k-1}$，可分别得到

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}C_{n-3}^{k-3}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\sum_{k=3}^{n}C_{n-3}^{k-3}x^{k-3}(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\text{；}$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(n-1)}{n^2}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\text{；}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{1}{n^2}x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n^2}x。$$

所以

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+\frac{3(n-1)}{n^2}x^2+\frac{1}{n^2}x。$$

2. 设$f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$，求它的四次 Bernstein 多项式$B_4(f,x)$。

解　$$B_4(f,x)=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{\frac{k}{4}}C_4^k x^k(1-x)^{4-k}$$
$$=2x(1-x)^3+3\sqrt{2}x^2(1-x)^2+2\sqrt{3}x^3(1-x)+x^4$$
$$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)x^4+2(3+\sqrt{3}-3\sqrt{2})x^3+3(\sqrt{2}-2)x^2+2x。$$

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：对任意给定的$\varepsilon>0$,，存在有理系数多项式$P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

对一切$x\in[a,b]$成立。

证　由定理 10.5.1，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在多项式$Q(x)$，使得对一切$x\in[a,b]$ 成立

$$|Q(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

设$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k x^k$，其中$b_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$是实数，由于有理数集合在

实数集中是稠密的，可以取有理数 $a_k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 分别与 $b_k\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 充分接近，令 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

于是

$$|P(x)-f(x)|\le|P(x)-Q(x)|+|Q(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任一多项式 $g(x)$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0。$$

证明在 $[a,b]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$。

证 由定理 10.5.1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

由于

$$\int_a^b[f(x)-P(x)]^2dx=\int_a^b[f^2(x)-2f(x)P(x)+P^2(x)]dx=\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]dx，$$

所以

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]dx=\int_a^b[f(x)-P(x)]^2dx<(b-a)\varepsilon^2。$$

由 ε 的任意性，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx=0，$$

再由 $f(x)$ 的连续性，得到

$$f(x)\equiv 0。$$

5. 设 $P_0(x)=0$，$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x^2-P_n^2(x)}{2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\{P_n(x)\}$ 在[-1,1]上一致收敛于｜x｜。

证 首先有 $0\le P_0(x)\le|x|$。设 $0\le P_k(x)\le|x|$，由于函数 $h(t)=t+\frac{x^2-t^2}{2}$ 在

$t \in [0,1]$是单调增加的，所以有

$$0 \le P_{k+1}(x) = P_k(x) + \frac{x^2 - P_k^2(x)}{2} \le |x|，$$

由数学归纳法得到对一切自然数n成立

$$0 \le P_n(x) \le |x|。$$

于是由$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$，又得到$P_{n+1}(x) \ge P_n(x)$，所以函数序列$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$，对等式$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$两边求极限，得到$P(x) = P(x) + \dfrac{x^2 - P^2(x)}{2}$，于是解得$P(x) = |x|$，并由 Dini 定理可知$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上是一致收敛于$|x|$的。