习 题 9.4 任意项级数

1. 讨论下列级数的收敛性(包括条件收敛与绝对收敛)

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^{2}n}{n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^{n}\sin^{2n}x}{n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^{p}}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{2}}{2^{n}}x^{n}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$;

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n}}{n^{p}\ln^{q}n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^{n}}$ （$a>0$）.

解（1）设级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!},$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，所以 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，因此级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$ 发散。

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）当 n 充分大（即 $n+x>0$）时是交错级数，且 $\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）收敛；又由于 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right|\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\neq -n$）条件收敛。

（3）当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设 $x\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 当 n 充分大（即 $n>\frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且 $\left|\sin\frac{x}{n}\right|$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 条件收敛。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

（5）$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^{2}n}{n}$ 是交错级数，当 $n\geq 8$，$\frac{\ln^{2}n}{n}$ 单调减少趋于零，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^{2}n}{n}$ 收敛；又由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^{2}n}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^{2}n}{n}$ 条件收敛。

（6）设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{6n}$ 存在且有限。容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 收敛。

由于 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 条件收敛。

（7）当$x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$时，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，

$0\le 4\sin^2 x<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$绝对收敛。

当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$时，$\sin^2 x=\frac{1}{4}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$是条件收敛级数。

在其他情况下，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$4\sin^2 x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

（8）当$x=\frac{k\pi}{2}$时，级数的一般项都为零，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛。

设$x\ne\frac{k\pi}{2}$。当$p>1$时，由于$\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\le\frac{1}{n^p}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n^p}$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2n^p}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散。

当$p\le 0$时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散。

（9）设 $x_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{|x|}{2}$，所以

当 $|x|<2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 绝对收敛；

当 $|x|>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 发散；

当 $|x|=2$ 时，级数的一般项不趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$ 也发散。

（10）设 $u_n=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$。由于 $\{u_n\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛。

因为 $u_n\sim\frac{\ln 2}{3n}\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{3n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 条件收敛。

（11）设 $x_n=\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=|x|$，所以

当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 绝对收敛；

当 $|x|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时级数（绝对）收敛，在其他情况下级数发散；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1,\ q>1$ 时级数绝对收敛，当 $p=1,\ q\le 1$ 或 $0<p<1$ 或 $p=0,\ q>0$ 时级数条件收敛，在其他情况下级数发散。

（12）设 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$。

当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\dfrac{1}{a}<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$绝对收敛；

当$a=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当$0<a<1$时，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，$\left\{\dfrac{a}{1+a^n}\right\}$单调有界，由 Abel 判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$收敛，但由于$|x_n|\sim\dfrac{a}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n}$发散，所以级数条件收敛。

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述级数发散：

⑴　$1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\cdots$；

⑵　$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\cdots$。

证 （1） 设级数的一般项为x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6},$$

由于n可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

（2） 设级数的一般项为x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}>\frac{n}{6n}=\frac{1}{6},$$

由于n可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

3. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\{x_n\}$ 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$。

证　由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N'>0$，对一切$m>n>N'$，成立

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取$N=2(N'+1)$，则当$n>N$时，有$\left[\dfrac{n}{2}\right]>N'$，于是成立

$$0<\frac{n}{2}x_n<x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+x_n<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0 < nx_n < \varepsilon\text{。}$$

4. 若对任意$\varepsilon > 0$和任意正整数 p，存在$N(\varepsilon, p)$，使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切 n＞N 成立，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是否收敛？

解　级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛。

例如：级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，但对任意$\varepsilon > 0$和任意正整数 p，取$N(\varepsilon, p) = \frac{p}{\varepsilon}$，当$n > N(\varepsilon, p)$时，

$$\left| x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p} \right| < \frac{p}{n+1} < \varepsilon\text{。}$$

5. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

解　$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$，则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$，但级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散。

6. 设$x_n \geq 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，问交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$是否收敛?

解　$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 2k \\ \frac{1}{k^2} & n = 2k-1 \end{cases}$，则$x_n \geq 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，但$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$发散。

7. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ 发散。问级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x_n} \right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

因为正项数列$\{x_n\}$单调减少，所以必定收敛。如果$\lim_{n\to\infty}x_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$，于是当$n$充分大时，$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right)^n$，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

8. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛，则当$\alpha>\alpha_0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$也收敛。

证　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}})$，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛，$\left\{\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right\}$单调有界，利用 Abel 判别法，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$收敛。

注　本题也可利用 Dirichlet 判别法证明。

9. 若 $\{nx_n\}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

证　令$a_n=x_n, b_n=1$，则$B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i=k$。利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=nx_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(x_{k+1}-x_k)。$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{n+1}],$$

因为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$收敛，由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)$收敛。再由数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性，即可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

10. 若$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$收敛。

证 由于$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛,可知$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \forall p\in \mathrm{N}^{+}$：$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}y_k\right|<\varepsilon$。由于$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，所以收敛,于是可知$\{x_n\}$有界。

设$\sum_{n=2}^{\infty}|x_n - x_{n-1}| = A$，$|x_n|\le B$，令$B_{n+k} = y_{n+1}+y_{n+2}+\cdots+y_{n+k}$，利用Abel变换，得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k y_k\right| = \left|x_{n+p}B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(x_{k+1}-x_k)B_k\right| < (A+B)\varepsilon。$$

由 Cauchy 收敛原理，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$收敛。

11．设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0。$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

证 由$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$可知$f(0)=0$，$f'(0)=0$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\quad（n\to\infty），$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

12．已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$也发散。

证 采用反证法。令$y_n = (1+\frac{1}{n})x_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛，因为$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$收敛，与条件矛盾，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$发散。

13. 设$x_n>0$，$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，证明：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$收敛。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\gamma>0$，首先可知当 n 充分大时有 $x_n>x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的。然后取 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\gamma>\beta>\alpha>0$，可知当 n 充分大时，成立

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\alpha}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

从而

$$(n+1)^{\alpha}x_{n+1}<n^{\alpha}x_n,$$

这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的，于是存在 $A>0$，使得 $n^{\alpha}x_n\le A$，即

$$0<x_n<\frac{A}{n^{\alpha}},$$

从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零。因此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是 Leibniz 级数，所以收敛。

14. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ \to\ \gamma\quad (n\to\infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数(见例 2.4.8)，求下述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ \cdots。$$

解. 设 $b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，设级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ \cdots\ +\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ \cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)+\frac{1}{2}(b_{2n}+\ln 2n)=b_{4n}+\ln 4n,$$

于是

$$S_{3n}=b_{4n}-\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{3}{2}\ln 2。$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$，得到

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\ln 2。$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$；

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}$ （$|q|<1$）。

解 （1）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则 $c_0=1$，且当 $n\geq 1$ 时，

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j}{i!\cdot j!}=\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}(-1)^j=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0，$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1。$$

（2）设 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则

$$c_n=\sum_{i+j=n}(q^iq^j)=(n+1)q^n。$$

又由于 $|q|<1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$，从而得到

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}\ (|q|<1)。$$

习　题　9.5　无穷乘积

1. 讨论下述无穷乘积的敛散性

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$;　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$;

(3) $\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$;　　(6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$;

(7) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;　　(8) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;

(9) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]$;　　(10) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ （$p,q>0$）

解（1）

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right),$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$收敛。

（2）

$$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)\right],$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1=\sqrt{1+\frac{2}{n-1}}-1\sim\frac{1}{n-1}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散，所以$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$发散。

（3）

$$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\prod_{n=3}^{\infty}(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}),$$

由于$\sum_{n=3}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$收敛，所以$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$收敛。

（4）

$$\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}=\prod_{n=1}^{\infty}[1-(1-n\sin\frac{1}{n})],$$

$$1-n\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^2}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$收敛。

（5） $$\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n^x}}-1\right)\right],$$

$$e^{\frac{1}{n^x}}-1\sim\frac{1}{n^x}\,(n\to\infty),$$

当$x>1$时，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$收敛；

当$x\le 1$时，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$发散，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$发散。

（6）因为对任意x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$收敛。

（7）当$|x|<2$时，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$收敛；

当$|x|\ge 2$时，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$发散，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$发散。

（8） $$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}-1\right)\right],$$

$$e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}-1\sim\frac{1}{n^2}\,(n\to\infty),$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$收敛。

（9） $$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{x^2}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$收敛，所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]$收敛。

（10） $$\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots\right)=1+\frac{1}{n^p}-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots,$$

由此可知

当 $\min(p,2q)>1$ 时，$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 收敛；

当 $\min(p,2q)\le 1$ 时，$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 发散。

2. 计算下述无穷乘积的值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; (2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

(3) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$。

解 (1)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}\text{。}$$

(2)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}==\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\text{。}$$

(3)由于

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}==\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\text{。}$$

3. 设 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛。

证 设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则

$$0<\alpha_n=1-\cos x_n=2\sin^2\frac{x_n}{2}<\frac{1}{2}x_n^{\,2}，$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$收敛。

4. 设｜a_n｜＜$\frac{\pi}{4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$绝对收敛。

证　由于$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。设

$$\tan(\frac{\pi}{4}+a_n)=\frac{1+\tan a_n}{1-\tan a_n}=1+\alpha_n,$$

则

$$\alpha_n=\frac{2\tan a_n}{1-\tan a_n}，\quad\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2，$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$绝对收敛。

5. 证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0$　($0<\beta<\alpha$)。

证　(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$，

由于

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{1}{2n}\ (n\to\infty)，\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=-\infty，$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=0。$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)$，

由于

$$\ln\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)\sim-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\ (n\to\infty)，\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty，$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=0。$$

6. 设｜q｜<1，证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$。

证　设$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+q^k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}=\frac{\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})},$$

由于$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})=1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}==\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

由于$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

7. 设$a_{2n-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$a_{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$都发散，

但无穷乘积$\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收敛。

证　设$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

由于$\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)\sim\dfrac{1}{k}\ (k\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=+\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；又由于$a_n^2\ge\dfrac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也发散。

设 $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}(1+\frac{1}{\sqrt{k}})\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

所以 $\lim_{n\to\infty}P_{2n}$ 存在且非零。由于

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}P_n$ 存在且非零，即无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。