习 题 10.2 一致收敛级数的判别与性质

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$， $x\in[0, 1]$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$， $x\in[0, 1]$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx^2}$， $x\in[0,+\infty)$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$， (i) $x\in[0,+\infty)$， (ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$， $x\in(-\infty, +\infty)$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$， $x\in(-\infty, +\infty)$；

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$， $x\in[0, 1]$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$， $x\in(-\infty, +\infty)$；

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$， (i) $x\in(0, +\infty)$，(ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$， $x\in(-\infty, +\infty)$；

(11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$， $x\in(-\infty, +\infty)$；

(12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$， $x\in(-\infty, +\infty)$。

解（1） $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=1-x^{n+1}$，

由于$\{x^{n+1}\}$在$[0,1]$非一致收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上非一致收敛。

（2）设$u_n(x)=(1-x)^2x^n$，则在$[0,1]$上

$$0\le u_n(x)\le u_n\left(\frac{n}{n+2}\right)<\frac{4}{(n+2)^2},$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(n+2)^2}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$在$[0,1]$上一致

收敛。

（3）设$u_n(x)=x^3e^{-nx^2}$，则当$n\ge 1$时，在$[0,+\infty)$上

$$0\le u_n(x)\le u_n(\sqrt{\frac{3}{2n}})=\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}},$$

其中$K=\frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$。由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛。

（4）(i) 设$u_n(x)=xe^{-nx^2}$，对任意的正整数N，取$m=2n\ (n>N)$与$x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in[0,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=x_ne^{-(n+1)x_n^2}+x_ne^{-(n+2)x_n^2}+\cdots+x_ne^{-2nx_n^2}>nx_ne^{-2nx_n^2}$$
$$=\sqrt{n}e^{-2}\to+\infty\ (n\to\infty),$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$不满足 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知$\sum_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设$u_n(x)=xe^{-nx^2}$，则当$n>\frac{1}{2\delta^2}$时，$u_n(x)$关于x在$[\delta,+\infty)$上单调减少，所以

$$0\le u_n(x)\le\delta e^{-\delta^2 n},$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\delta e^{-\delta^2 n}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-nx^2}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

（5）设$u_n(x)=\frac{x}{1+n^3x^2}$，则当$n\ge 1$时，$|u_n(x)|\le\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（6）设$u_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，则当$n\ge 1$时，$|u_n(x)|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，

由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

（7）设 $a_n(x)=(1-x)x^n$，$b_n(x)=(-1)^n$，则 $\{a_n(x)\}$ 对固定的 $x\in[0,1]$ 关于 n 是单调的，且在 $[0,1]$ 上一致收敛于零，同时 $\left|\sum_{k=0}^{n}b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

（8）设 $a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则 $\{a_n(x)\}$ 对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于 n 是单调的，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零，同时 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

（9）(i) 设 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，取 $x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，则

$$u_n(x_n)=2^n\to+\infty,$$

即 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛；

(ii) 设 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，则当 $x\in[\delta,+\infty)$ 时，

$$|u_n(x)|\le\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛。

（10）设 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=\sin x\sin nx$，由于 $a_n(x)$ 与 x 无关且单调趋于

零，所以$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于n是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos(n+\frac{1}{2})x-\cos\frac{x}{2}\right| \le 2,$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（11）设$u_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，取$\varepsilon_0=\frac{1}{e^2}>0$，对任意的正整数$N$，取$m=2n\ (n>N)$与$x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x_n)=\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+1}}+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+2}}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{nx_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{1}{e^2}=\varepsilon_0,$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$不满足Cauchy收敛原理的条件，由此可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

（12）设$a_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right|\le 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

2. 证明：函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数。

证　由于$\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2+1}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上一致收敛，所以$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续。

设$\sigma(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{\cos nx}{n^2+1})'=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$，由于$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$单调趋于零，且对任意的$0<\delta<\pi$，当$x\in[\delta,2\pi-\delta]$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由 Dirichlet 判别法，可知 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛，即 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上成立，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上有连续的导函数。

3. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数。

证 对任意的 $0<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<ne^{-nx}\le ne^{-an}$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-an}$ 收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

设 $\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(ne^{-nx})'=-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$，与上面类似可证明 $-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数。

注意到 $(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}\ (k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是内闭一致收敛的，所以上述过程可以逐次进行下去，由数学归纳法，可知 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有各阶连续导函数。

4. 证明：函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数；函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导函数。

证 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，对任意 $1<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^a}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 收敛，由 Weierstraass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。

又 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^x}\right)=-\frac{\ln n}{n^x}$，且对任意 $1<a<A<+\infty$，$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[a,A]$ 上一致收

敛，即$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，则$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续。由逐项求导定理，可知$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$，即$f(x)$在$(1,+\infty)$上有连续导函数。

利用$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{n^x}\right)=(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}\ (k=1,2,\cdots)$，可以证明$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$f(x)$在$(1,+\infty)$上有各阶连续导函数。

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$，由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续。

又$\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，同样由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续。由逐项求导定理，可知$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$上有连续导函数。

利用$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}\ (k=1,2,\cdots)$，同样由 Dirichlet 判别法，可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$g(x)$在$(0,+\infty)$上有各阶连续导函数。

5. 证明：函数项级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan\frac{x}{n^2})。$$

证　函数项级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 收敛，且

$$\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{n^2})=\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}},$$

由于 $\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}\le\frac{1}{n^2}$，由 Weierstraass 判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{n^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，再由逐项求导定理，即可知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\arctan\frac{x}{n^2})。$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$；　　(2) $\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$。

证　(1) 首先对于每一固定的 $x\in[0,\delta)$ $(\delta>0)$，$\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单调，且对于一切 $x\in[0,\delta)$ 与一切 n，成立 $0<\frac{1}{n^x}\le1$，又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数，它的收敛意味着关于 x 的一致收敛性，于是由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛，因此和函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 关于 x 在 $[0,\delta)$ 连续，从而成立

$$\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n。$$

(2) 由例题 10.2.4，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，再由逐项积分定理，得到

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}。$$

7. 设 $u_n(x)$，$v_n(x)$ 在区间 (a,b) 连续，且 $|u_n(x)|\le v_n(x)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^+$

成立。证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$(a,\ b)$上点态收敛于一个连续函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$也必然收敛于一个连续函数。

证 设任意闭区间$[c,d] \subset (a,b)$。由于$v_n(x) \ge 0$在$[c,d]$连续，和函数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$连续，则由 Dini 定理可知$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$一致收敛。于是由 Cauchy 收敛原理，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall m > n > N$，$\forall x \in [c,d]$，成立

$$\left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_m(x) \right| \le v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_m(x) < \varepsilon，$$

此即说明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$一致收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$连续。由于$[c,d] \subset (a,b)$的任意性，即得到$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$连续。

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x = a$与$x = b$收敛，且对一切$n \in \mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上单调增加，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,\ b]$上一致收敛。

证 由于$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x = a$与$x = b$收敛，由 Cauchy 收敛原理，可知

$$\forall \varepsilon > 0，\ \exists N，\ \forall m > n > N，\text{成立} \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(a) \right| < \varepsilon \ \text{与} \ \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(b) \right| < \varepsilon。$$

再由$u_n(x)$在$[a,b]$上的单调增加性，可知对一切$x \in [a,b]$，成立

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \le \max\left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(a) \right|, \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(b) \right| \right\} < \varepsilon，$$

此即说明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,\ b]$上一致收敛。

9. 设对一切$n \in \mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在$x = a$右连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x = a$发散，证明：对任意$\delta > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,\ a+\delta)$上必定非一致收敛。

证 采用反证法。设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上一致收敛，则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N\text{，}\quad\forall x\in(a,a+\delta)\text{，成立}\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

再令$x\to a+$,得到$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x=a$收敛，与条件矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a, a+\delta)$上必定非一致收敛。

10．证明函数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上是一致收敛的，其中$a$是小于$2\ln^2 2$的任意固定正数。

证 $\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上单调增加，所以

$$\ln\left(1-\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\le\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\le\ln\left(1+\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\text{，}$$

$$\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\sim\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\ (n\to\infty)\text{。}$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)$收敛，再由习题 8 可知$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上一致收敛。

11．设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\text{。}$$

（1）证明：$f(x)$在$[0,\pi/2]$上连续；

（2）计算$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$。

解 （1）对一切$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，有

$$0\le\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\le\frac{1}{2^n}\text{，}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，由 Weierstraass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，从而$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续。

（2）由（1），$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，由逐项积分定理，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}d\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ \ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\ln\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\ \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\prod_{n=1}^{\infty}\ \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

再利用例题 9.5.3 的结果$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$，得到

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)=\ln\frac{3}{2}。$$

12．设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$。

（1） 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

（2）记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

证 （1）对一切$x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstraass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，所以$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

（2）由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，由逐项积分定理，

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\ \int_0^x\frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}},$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3+(2n-1)}},$$

这是一个 Leibniz 级数，它的前两项为$\frac{\sqrt{2}}{2}$与$-\frac{1}{3\sqrt{30}}$，所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

13．设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$。

（1） 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且一致连续；

（2） 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

证 （1）由 $\frac{1}{2^n+x}\le\frac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上点态收敛；又 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)=\frac{-1}{(2^n+x)^2}$，且对一切 $x\in[0,+\infty)$，$\left|\frac{-1}{(2^n+x)^2}\right|\le\frac{1}{2^{2n}}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。由逐项求导定理，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导。

由于

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\le\left|x_1-x_2\right|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n},$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

（2） $\int_0^A f(x)dx=\int_0^A(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x})dx>\sum\limits_{k=0}^{n}\int_0^A\frac{dx}{2^k+x}=\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)$，

由于 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)=+\infty$，可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx=+\infty$，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散。