第七章　定积分

习　题　7.1　定积分的概念和可积条件

1. 用定义计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 (ax+b)\,dx$；　　(2) $\int_0^1 a^x\,dx$　($a>0$).

解　(1) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，于是 $\sum_{i=1}^{n}(a\frac{i}{n}+b)\frac{1}{n}=\frac{a}{2}(1+\frac{1}{n})+b\to\frac{a}{2}+b\ (n\to\infty)$，即

$$\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b。$$

(2) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$，及 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，

于是 $\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}$。因为 $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\ln a\ (n\to\infty)$，$a^{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}\to\frac{a-1}{\ln a}$，　即

$$\int_0^1 a^x\,dx=\frac{a-1}{\ln a}。$$

2. 　证明，若对 $[a,b]$ 的任意划分和任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在，则 $f(x)$ 必是 $[a,b]$ 上的有界函数。

证　用反证法。设 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$，则取 $\varepsilon=1,\exists\delta>0$，对任意的划分 P 与任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$，　就有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<|I|+1$。

取定了划分后，n 与 $\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots n)$ 也就确定，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则必定存在小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界。取定

$\xi_1,\cdots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_n$，必可取到$\xi_i$，使 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I|+1$ 不成立，从而产生矛盾，所以 $f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数。

3. 证明 Darboux 定理的后半部分：对任意有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=l。$$

证 $\forall\varepsilon>0$，因为l是$\underline{\mathbf{S}}$的上确界，所以 $\exists\underline{S}(P')\in\underline{\mathbf{S}}$，使得

$$0\le l-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{2}。$$

设划分$P': a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_p'=b$， M,m是 $f(x)$的上、下确界，取

$$\delta=\min\left(\Delta x_1',\Delta x_2',\cdots,\Delta x_p',\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right),$$

对任意一个满足$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$的划分

$$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记与其相应的小和为$\underline{S}(P)$，现将P',P的分点合在一起组成新的划分P''，则由引理 7.1.1， $\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')\le 0$。

下面来估计$\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)$：

（1）若在(x_{i-1},x_i)中没有P'的分点，则$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项相同，它们的差为零；

（2）若在(x_{i-1},x_i)中含有P'的分点，由于两种划分的端点重合，所以这样的区间至多只有 $p-1$个。由δ的取法，可知

$$\Delta x_i\le\delta\le\Delta x_j',\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,p,$$

所以在(x_{i-1},x_i)中只有一个新插入的分点x_j'，这时$\underline{S}(P''),\underline{S}(P)$中的相应项的差为

$$[m_i'(x_j'-x_{i-1})+m_i''(x_i-x_j')]-m_i(x_i-x_{i-1})\le(M-m)(x_i-x_{i-1})<(M-m)\delta,$$

从而 $0 \le \underline{S}(P'') - \underline{S}(P) < (p-1)(M-m)\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$。

综合上面的结论，就有

$$0 \le l - \underline{S}(P) = [l - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(P) = l。$$

4. 证明定理 7.1.3。

证 必要性是显然的，下面证充分性。

设 $\forall \varepsilon > 0$，存在一种划分 P'，使得相应的振幅满足 $\sum_{i=1}^{p} \omega_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{3}$，即 $\overline{S}(P') - \underline{S}(P') < \frac{\varepsilon}{3}$。取 $\delta = \min\left(\Delta x_1', \Delta x_2', \cdots, \Delta x_p', \frac{\varepsilon}{3(p-1)(M-m)}\right)$，对任意一个满足 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) < \delta$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

现将 P', P 的分点合在一起组成新的划分 P''，则由 Darboux 定理的证明过程，可得

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{S}(P) - \underline{S}(P) &= [\overline{S}(P) - \overline{S}(P'')] + [\overline{S}(P'') - \overline{S}(P')] + \\ &\quad [\overline{S}(P') - \underline{S}(P')] + [\underline{S}(P') - \underline{S}(P'')] + [\underline{S}(P'') - \underline{S}(P)] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理 7.1.1，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

5. 讨论下列函数在 [0,1] 的可积性：

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \ne 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x\text{为有理数}, \\ 1, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{为有理数}, \\ x, & x\text{为无理数}; \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解：(1) $0\le f(x)<1$，且 $f(x)$ 在[0,1]上的不连续点为 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 与 $x=0$。$\forall\varepsilon>0$，取定 $m>\frac{2}{\varepsilon}$，$f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{m},1]$ 上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m},1]$ 上可积，即存在 $[\frac{1}{m},1]$ 的一个划分 P，使得 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，将 P 的分点和 0 合在一起，作为[0,1]的划分 P'，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

由定理 7.1.3，$f(x)$ 在[0,1]上可积。

(2) 因为对[0,1]的任意划分 P，总有 $\omega_i=2$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=2$，由定理 7.1.2 可知 $f(x)$ 在[0,1]上不可积。

(3) 因为对[0,1]的任意划分 P，$f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 x_i，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-x_{i-1})\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2-x_{i-1}{}^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x_n{}^2-x_0{}^2)=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在[0,1]上不可积。

(4) $-1\le f(x)\le 1$，且 $f(x)$ 在[0,1]上的不连续点为 $x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 与 $x=0$。$\forall\varepsilon>0$，取定 $m>\frac{4}{\varepsilon}$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m},1]$ 上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{m},1]$ 上可积，即存在 $[\frac{1}{m},1]$ 的划分 P，使得 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$。将 P 的分点与 0 合在一起作为[0,1]的划分 P'，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在[0,1]上可积。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\ge m>0$（m 为常数），

证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积。

证　任取$[a,b]$的一个划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，则

$$\omega_i(\frac{1}{f})=\sup_{x_{i-1}\le x',x''\le x_i}\left(\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right)\le\frac{1}{m^2}\sup_{x_{i-1}\le x',x''\le x_i}(f(x')-f(x''))=\frac{1}{m^2}\omega_i(f),$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)<\delta$ 时，

$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<m^2\varepsilon$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i<\varepsilon$，所以$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上可积。

7. 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积。

证　不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，且$c\in(a,b)$，并设$|f(x)|\le M$。$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{12M},c-a,b-c\right\}$，则 $\exists N>0$，当$n>N$时，$|x_n-c|<\delta$。

由于$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上只有有限个不连续点，所以$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上都可积，即存在$[a,c-\delta]$的一个划分$P^{(1)}$和$[c+\delta,b]$的一个划分$P^{(2)}$，使得 $\sum\limits_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}<\dfrac{\varepsilon}{3},\sum\limits_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}<\dfrac{\varepsilon}{3}$。将$P^{(1)}$、$P^{(2)}$的分点合并在一起组成$[a,b]$的一个划分$P$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i}\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}+\sum_{i}\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}+4M\delta<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以$f(x)$在$[a,b]$上可积。

$c=a$或$c=b$的情况可类似证明。

8．设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数。证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$与$\sigma>0$，存在划分P，使得振幅$\omega_i\ge\varepsilon$的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$（即振幅不能任意小的那些小

区间的长度之和可以任意小)。

证　充分性：设$|f(x)|\le M$。　$\forall \varepsilon=\sigma>0$，存在划分$P$，使得振幅$\omega_i\ge\varepsilon$的那些小区间的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\omega_i\Delta x_i<[(b-a)+2M]\varepsilon,$$

即$f(x)$在$[a,b]$上可积。

必要性：用反证法，如果存在$\varepsilon_0>0$与$\sigma_0>0$，对任意划分P，振幅$\omega_i\ge\varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于σ_0，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i\ge\varepsilon_0\sum_{\omega_i\ge\varepsilon_0}\Delta x_i\ge\sigma_0\varepsilon_0,$$

则当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\to 0$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$不趋于零，与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾。

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$A\le f(x)\le B$，$g(u)$在$[A,B]$上连续，证明复合函数$g(f(x))$在$[a,b]$上可积。

证　由于$g(u)$在$[A,B]$连续，所以可设$|g(u)|\le M$，且$g(u)$一致连续，于是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall u',u''\in[A,B]$，只要$|u'-u''|<\delta$，就成立

$$|g(u')-g(u'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}。$$

由于$f(x)$在$[a,b]$可积，由习题 8，对上述$\varepsilon>0$与$\delta>0$，存在划分P，使得振幅$\omega_i(f)\ge\delta$的小区间的长度之和小于$\frac{\varepsilon}{4M}$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i=\sum_{\omega_i(f)<\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i+\sum_{\omega_i(f)\ge\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{\omega_i(f)<\delta}\Delta x_i+2M\sum_{\omega_i(f)\ge\delta}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon,$$

即复合函数$g(f(x))$在$[a,b]$上可积。