习题 12.6 无条件极值

1. 讨论下列函数的极值：

(1) $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$；

(2) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$；

(3) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$；

(4) $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$；

(5) $f(x,y)=xy+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}$，其中常数 $a>0,\quad b>0$；

(6) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$ （$x,y,z>0$）。

解 (1) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=4x^3-4x=0 \\ f_y=8y^3-24y=0 \end{cases},$$

解得

$$x=0,\pm1;\ \ y=0,\pm\sqrt{3},$$

即函数有 9 个驻点。再由 $f_{xx}=4(3x^2-1)$， $f_{xy}=0$， $f_{yy}=24(y^2-1)$，可知

$$H=96(3x^2-1)(y^2-1)。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(0,0)$， $(1,\sqrt{3})$， $(1,-\sqrt{3})$， $(-1,\sqrt{3})$， $(-1,-\sqrt{3})$ 满足 $H>0$，所以是极值点，而其余驻点不是极值点。再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在 $(0,0)$ 点取极大值 6；在 $(1,\sqrt{3})$，$(1,-\sqrt{3})$，$(-1,\sqrt{3})$，$(-1,-\sqrt{3})$ 四点取极小值 -13。

注 本题可使用配方法得到

$$f(x,y)=(x^2-1)^2+2(y^2-3)^2-13,$$

由此易知 $(1,\sqrt{3})$， $(1,-\sqrt{3})$， $(-1,\sqrt{3})$， $(-1,-\sqrt{3})$ 四点为函数的最小值点，最小值为 -13，函数无最大值，$(0,0)$ 点为函数的极大值点，极大值为 6。

（2）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases},$$

两式相减，可解得 $x = y = 0, \pm 1$，即驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,-1)$ 三点。再由 $f_{xx} = 12x^2 - 2$，$f_{xy} = -2$，$f_{yy} = 12y^2 - 2$，可知

$$H = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 4。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(1,1)$，$(-1,-1)$ 满足 $H > 0$，所以是极值点，再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在 $(1,1)$，$(-1,-1)$ 两点取极小值 -2。

在 $(0,0)$ 点，有 $H = 0$，且 $f(0,0) = 0$。由于 $f(x,x) = 2x^2(x^2 - 2)$，$f(x,-x) = 2x^4$，可知函数在 $(0,0)$ 点附近变号，所以 $(0,0)$ 不是极值点。

（3）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = -2z = 0 \end{cases},$$

解得 $(0,0,0)$ 是唯一的驻点。由 $f(0,0,0) = 0$，$f(x,y,0) = x^2 + y^2$，$f(0,0,z) = -z^2$，可知函数在 $(0,0,0)$ 点附近变号，即 $(0,0,0)$ 不是极值点，所以函数无极值点。

注　对于二次多项式 $f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，它的 Hesse 矩阵 H 是常数矩阵，我们有如下结论：

设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的驻点，则由 $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T H(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 可知

（a）$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为最小值的充分必要条件是 H 为半正定矩阵；

（b）$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为最大值的充分必要条件是 H 为半负定矩阵；

（c）$f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值的充分必要条件是 H 为不定矩阵。

本题由于函数 $f(x,y,z)$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵，所以 $(0,0,0)$ 不是 $f(x,y,z)$ 的极值点。

（4）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 2x(3x^4 - 2yx^2 - y) = 0 \\ f_y = 2y - x^2 - x^4 = 0 \end{cases},$$

解得 $x = y = 0$；$x = \pm 1, y = 1$；$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{3}{8}$，即驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$，$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$ 和 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$ 五点。再由 $f_{xx} = 30x^4 - 12yx^2 - 2y$，$f_{xy} = -2x - 4x^3$，$f_{yy} = 2$，可知

$$H = 2(30x^4 - 12yx^2 - 2y) - (2x + 4x^3)^2。$$

应用定理 12.6.2。驻点 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$，$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$ 满足 $H > 0$，所以是极值点，再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$，$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8})$ 取极小值 $-\dfrac{1}{64}$。

在 $(1,1)$，$(-1,1)$ 点 $H < 0$，所以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 不是极值点。

在 $(0,0)$ 点 $H = 0$，且 $f(0,0) = 0$。由于 $f(x, x^3) = -x^5(1-x)^2$，易知函数在 $(0,0)$ 点附近变号，所以 $(0,0)$ 不是极值点。

（5）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = y - \dfrac{a^3}{x^2} = 0 \\ f_y = x - \dfrac{b^3}{y^2} = 0 \end{cases},$$

解得 $\left(\dfrac{a^2}{b},\dfrac{b^2}{a}\right)$ 是唯一的驻点。再由 $f_{xx} = \dfrac{2a^3}{x^3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = \dfrac{2b^3}{y^3}$，可知

$$H = \frac{4a^3b^3}{x^3y^3} - 1。$$

应用定理 12.6.2。由于在驻点 $\left(\dfrac{a^2}{b},\dfrac{b^2}{a}\right)$ 有 $H > 0$，再根据 f_{xx} 的符号，

可知函数在$(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a})$点取极小值$3ab$。

（6）先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x = 1-\dfrac{y}{x^2}=0 \\ f_y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}=0 \\ f_z=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases},$$

解得唯一的驻点$\left(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}}\right)$。由于函数在$\left(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}}\right)$点的 Hesse 矩阵

$\begin{pmatrix} 2^{\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -2^{-\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{4}} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$取极小值$4\cdot 2^{\frac{1}{4}}$。

2．设$f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$，证明函数$f$的最小值为$0$。

证 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=2x-2y+2z=0 \\ f_y=6y-2x=0 \\ f_z=4z+2x=0 \end{cases},$$

解得唯一驻点$(0,0,0)$，由于函数在$(0,0,0)$点的 Hesse 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在$(0,0,0)$点取极小值$f(0,0,0)=0$。

注　本题可使用配方法得到

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x-2y)^2+\frac{1}{2}(x+2z)^2+\frac{1}{2}y^2,$$

由此可知函数在$(0,0,0)$点取最小值$f(0,0,0)=0$。

3. 证明函数$f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值点，但无极小值点。

证 由

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-(1+\mathrm{e}^y)\sin x=0 \\ f_y(x,y)=\mathrm{e}^y\cos x-(1+y)\mathrm{e}^y=0 \end{cases},$$

解得 $x = k\pi$, $y = \cos k\pi - 1$，所以驻点为

$$(k\pi, \cos k\pi - 1)\text{，}\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\text{。}$$

由 $f_{xx} = -(1+e^y)\cos x$， $f_{xy} = -e^y \sin x$， $f_{yy} = \mathrm{e}^y \cos x - (2+y)\mathrm{e}^y$，可知在驻点 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 处，

$$H = \cos k\pi(1+e^y)e^y\text{，}$$

所以当 k 为奇数时 $H < 0$， $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 不是极值点；当 k 为偶数时 $H > 0$，再由 $f_{xx} < 0$，可知 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$ 是极大值点。所以函数有无穷多个极大值点，但无极小值点。

4．求函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 在闭区域

$$\mathbf{D} = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\pi\}$$

上的最大值与最小值。

解　由

$$\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ f_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}\text{，}$$

得到 $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$。在 $\mathbf{D}^\circ = \left\{(x, y) \mid 0 < x, y < x + y < 2\pi\right\}$ 上考虑，得到 $x = y = 2\pi - x - y$，即 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ 是函数在区域内部唯一的驻点。由于在区域边界上，即当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 或 $x + y = 2\pi$ 时，有 $f(x, y) = 0$，而在区域内部唯一的驻点上取值为 $f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$，根据闭区域上连续函数的性质，可知函数的最大值为 $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $f_{\min} = 0$。

5．在 $[0,1]$ 上用怎样的直线 $\xi = ax + b$ 来代替曲线 $y = x^2$，才能使它在平方误差的积分

$$J(a, b) = \int_0^1 (y - \xi)^2 dx$$

为极小意义下的最佳近似。

解　$$J(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}(a^2 - 2b) + ab + b^2$$

是 a, b 的二次多项式，它的 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是正定的，所以有最小值（见第 1 题（3）的注）。对参数 a, b 求导，

$$\begin{cases} J_a = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} + b = 0 \\ J_b = a + 2b - \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases},$$

得到$a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$，即$\left(1, -\dfrac{1}{6}\right)$是唯一的驻点，所以必定是最小值点。因此最佳直线为$\xi = x - \dfrac{1}{6}$。

6．在半径为R的圆上，求内接三角形的面积最大者。

解　设圆内接三角形的各边所对的圆心角为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，则三角形的面积为

$$S = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3] = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

由第 4 题知$\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3} = \alpha_3$时面积最大，这时圆内接三角形为正三角形，$S_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

7．要做一圆柱形帐幕，并给它加一个圆锥形的顶。问：在体积为定值时，圆柱的半径R，高H，及圆锥的高h满足什么关系时，所用的布料最省？

解　由帐幕的体积$V = \pi R^2 H + \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$，得到$H = \dfrac{V}{\pi R^2} - \dfrac{1}{3}h$，于是帐幕的表面积为

$$S = 2\pi RH + \pi R\sqrt{R^2 + h^2} = \frac{2V}{R} - \frac{2\pi Rh}{3} + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}。$$

对R与h求偏导数，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial h} = -\dfrac{2\pi R}{3} + \dfrac{\pi Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial R} = -\dfrac{2V}{R^2} - \dfrac{2\pi h}{3} + \pi\sqrt{R^2 + h^2} + \dfrac{\pi R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} = 0 \end{cases}。$$

由第一个方程，得到$R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}h$，再将$R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}h$与$V = \pi R^2 H + \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$代入第

二个方程，得到$H=\frac{1}{2}h$，所以当$\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{H}{1}=\frac{h}{2}$时，布料最省。

8．求由方程$x^2+2xy+2y^2=1$所确定的隐函数$y=y(x)$的极值。

解　由

$$y'=-\frac{x+y}{x+2y}=0,$$

得到$x+y=0$，再代入$x^2+2xy+2y^2=1$得到$y^2=1$，由此可知隐函数$y=y(x)$的驻点为$x=\pm1$，且当$x=\pm1$时有$y=\mp1$。

由于在驻点有

$$y''=-\frac{1+y'}{x+2y}+\frac{(x+y)}{(x+2y)^2}(1+2y')=-\frac{1}{y},$$

根据$y''(\pm1)$的符号可知$y=y(x)$在$x=-1$取极大值1，在$x=1$取极小值-1。

注　本题也可由

$$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=1,$$

得到$-1\le y\le 1$，由此可知$y=y(x)$在$x=-1$取极大值1，在$x=1$取极小值-1。

9．求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值。

解　由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4x}{1-2z-8y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4(y+2z)}{1-2z-8y}=0\end{cases},$$

得到$x=0$与$y+2z=0$，再代入$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$，得到$7z^2+z-8=0$即$z=1,-\frac{8}{7}$。由此可知隐函数$z=z(x,y)$的驻点为$(0,-2)$与$(0,\frac{16}{7})$。

由

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{1-2z-8y}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4}{1-2z-8y}，$$

可知在驻点$(0,-2)$与$(0,\frac{16}{7})$有$H>0$。

在$(0,-2)$点，$z=1$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{15}>0$，所以$(0,-2)$为极小值点，极小值为$z=1$；在$(0,\frac{16}{7})$点，$z=-\frac{8}{7}$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{15}<0$，所以$(0,\frac{16}{7})$为极大值点，极大值为$z=-\frac{8}{7}$。

注 1 原方程可以改写为

$$2x^2+2(y+2z)^2=(z-1)(7z+8)，$$

由左边非负可得$(z-1)(7z+8)\geq 0$，即$z\leq -\frac{8}{7}$或者$z\geq 1$。

注 2 在三维空间中，方程的图像是双叶双曲面，由两个不相连的部分组成。其中之一开口向上，最小值$z=1$，另一个开口向下，最大值$z=-\frac{8}{7}$。

10．在Oxy平面上求一点，使它到三直线$x=0$，$y=0$，和$x+2y-16=0$的距离的平方和最小。

解　平面上点(x,y)到三直线的距离平方和为

$$D(x,y)=x^2+y^2+(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}})^2。$$

对x,y求偏导数，

$$\begin{cases} D_x=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\ D_y=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0, \end{cases}，$$

得到$x=\frac{8}{5},y=\frac{16}{5}$，所以函数只有一个驻点$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$。

由于

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} D(x,y)=+\infty,$$

可知函数$D(x,y)$在驻点$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$有最小值。

11．证明：圆的所有外切三角形中，以正三角形的面积为最小。

证 设圆半径为1，外切三角形的两个顶角为2α与2β，则三角形的面积为

$$S=\cot\alpha+\cot\beta+\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\cot\alpha+\cot\beta+\tan(\alpha+\beta)。$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=-\csc^2\alpha+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial\beta}=-\csc^2\beta+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\end{cases},$$

得到$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$，所以

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6},$$

即外切正三角形的面积为最小。

12．证明：圆的所有内接n边形中，以正n边形的面积为最大。

证 设圆半径为1，圆内接n边形的各边所对的圆心角为$\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则$n$边形的面积为

$$S=\frac{1}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n-1}-\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]。$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}=\frac{1}{2}[\cos\alpha_1-\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]=0,\quad(k=1,2,\cdots,n-1),$$

推出

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}),$$

所以

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{n}，\quad (k = 1, 2, \cdots, n)，$$

即内接正n边形的面积为最大。

13．证明：当$0 < x < 1,\ 0 < y < +\infty$时，成立不等式

$$yx^y(1-x) < \mathrm{e}^{-1}。$$

证 令$f(x,y) = yx^y(1-x)$，对y求偏导，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y(1-x)(1+y\ln x) = 0，$$

解得$y = \frac{-1}{\ln x}$。对固定的$x \in (0,1)$，根据$\frac{\partial f}{\partial y}$在$y = \frac{-1}{\ln x}$附近的符号变化，可知$f(x,y)$（作为$y$的函数）的极大值点为$y = \frac{-1}{\ln x}$，极大值为$\varphi(x) = \frac{-(1-x)}{e\ln x}$。再对$\varphi(x)$求导，得到

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ex\ln^2 x}(1 - x + x\ln x)。$$

记

$$g(x) = 1 - x + x\ln x,\ \ x \in (0,1)，$$

则$g'(x) = \ln x < 0$，$g(0+) = 1, g(1-) = 0$，所以$g(x) > 0$，于是$\varphi(x)$严格单调增加。再由$\lim\limits_{x\to 1-}\varphi(x) = e^{-1}$，得到

$$f(x,y) \le \varphi(x) < e^{-1} \qquad (0 < x < 1, 0 < y < +\infty)。$$

14．某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养x（万尾），乙种鱼放养y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3 - \alpha x - \beta y)x \ \text{和}\ (4 - \beta x - 2\alpha y)y \qquad (\alpha > \beta > 0)。$$

求使产鱼总量最大的放养数。

解　鱼总产量为

$$P = (3 - \alpha x - \beta y)x + (4 - \beta x - 2\alpha y)y = -\alpha x^2 - 2\beta xy - 2\alpha y^2 + 3x + 4y。$$

对x, y求偏导数，

$$\begin{cases} P_x = -2\alpha x - 2\beta y + 3 = 0, \\ P_y = -2\beta x - 4\alpha y + 4 = 0, \end{cases}，$$

解得

$$x=\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}，\quad y=\frac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}。$$

因为$P=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y$是二次多项式，由

$$H=(-2\alpha)(-4\alpha)-(2\beta)^2=4(2\alpha^2-\beta^2)>0，\quad P_{xx}=-2\alpha<0，$$

可知其 Hesse 矩阵是负定的，所以函数有最大值，即当$x=\dfrac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$，$y=\dfrac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}$时产鱼总量最大。

12.6 计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1． 某种机器零件的加工需经两道工序，x表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），y表示在第二道工序中出现的疵点数。某日测得 8 个零件的x与y如下：

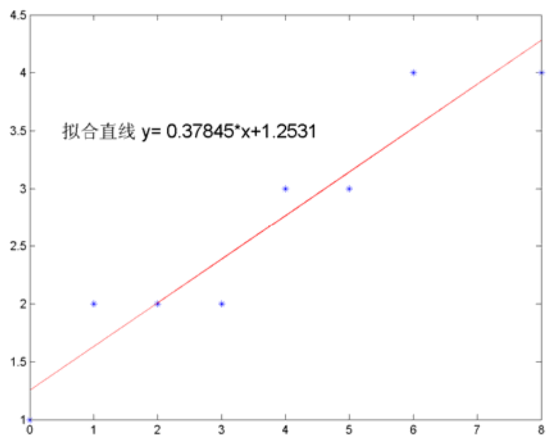
x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式$y = ax + b$，并画出拟合曲线。

解 程序代码为

```
hold off
x=[0,1,3,6,8,5,4,2];
y=[1,2,2,4,4,3,3,2];
plot(x,y,'b*')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(0.5,3.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线$y= 0.37845x+1.2531$。图形为



2．某品种大豆的脂肪含量x(%)与蛋白质含量y(%)的测定结果如下表所示：程序代码为

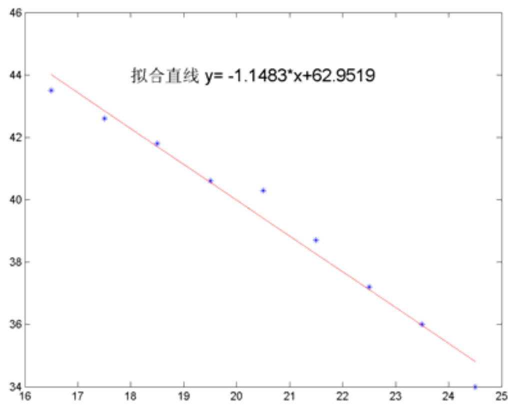
x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式，并画出拟合曲线。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.5,17.5,18.5,19.5,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5];
y=[43.5,42.6,41.8,40.6,40.3,38.7,37.2,36.0,34.0];
plot(x,y,'b*')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线  y= ',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(18,44,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y=-1.1483x+62.9519$。图形为



3．某种产品加工前的含水率（%）与加工后含水率（%）的测试结果如下表：

测试编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

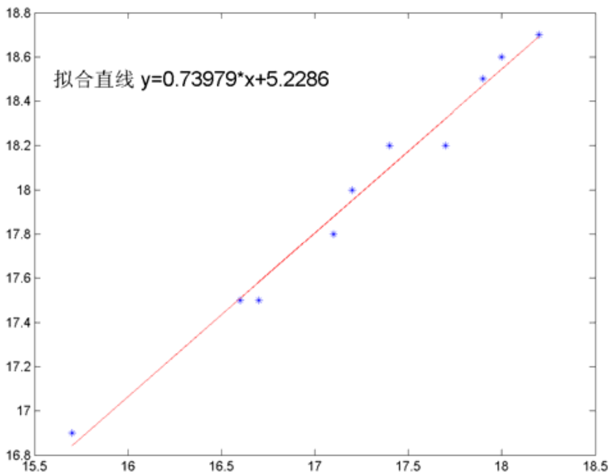
试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.7,18.2,18.0,17.9,17.4,16.6,17.2,17.7,15.7,17.1];
y=[17.5,18.7,18.6,18.5,18.2,17.5,18.0,18.2,16.9,17.8];
plot(x,y,'b*')
hold on
```

```
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a*x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线  y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(15.6,18.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y=0.73979x+5.2286$。图形为



4．盛钢水的钢包，在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀，容积会不断增大。在生产过程中，积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据。画出这些数据的散点图，找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系，并画出拟合曲线。

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

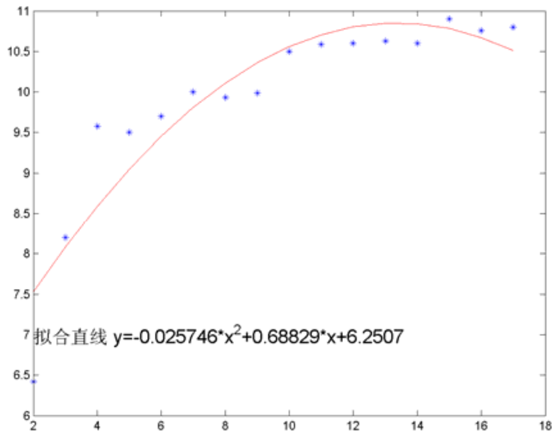
（提示：假设 $y=ax^2+bx+c$。）

解　程序代码为

```
hold off
x=2:17;
y=[6.42,8.20,9.58,9.50,9.70,10.00,9.93,9.99,10.50,10.59,10.60,10.63,10.60,10.90,10.76,10.80];
plot(x,y,'b*')
A=[x.^2',x',ones(size(x))'];
a=A\y'
hold on
y=a(1)*x.^2+a(2)*x+a(3)
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  y=',
```

num2str(a(1)),'*x^2+',num2str(a(2)),'*x+',num2str(a(3))];
text(5,8,string)

运行后，得拟合曲线 $y = -0.025746x^2 + 0.68829x + 6.2507$，图形为



5．在研究化学反应速度时，得到下列数据。找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系，并画出拟合曲线。

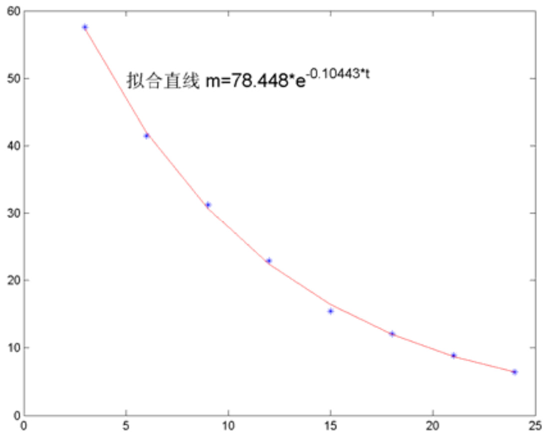
t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

（提示：m 与 t 的关系为 $m = a\mathrm{e}^{bt}$。）

解　程序代码为

```
hold off
x=3:3:24;
y=[57.6,41.5,31.2,22.9,15.4,12.1,8.9,6.4];
plot(x,y,'b*')
hold on
y1=log(y);
A=[x',ones(size(x))'];
a=A\y1';
y=exp(a(2))*exp(a(1)*x)；
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线  m=',num2str(exp(a(2))),'*e^{',num2str(a(1)),'*t}'];
text(8,28,string ,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $m=78.448e^{-0.10443t}$，图形为


拟合直线 m=78.448*e^-0.10443*t
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20
25