习 题　10.3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$；　(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$。

解（1）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=3$，所以收敛半径为$R=\frac{1}{3}$。

当$x=\frac{1}{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{2}{3})^n]$，级数发散。

当$x=-\frac{1}{3}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^n+(\frac{2}{3})^n]$，级数收敛。

所以收敛区域为$D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

（2）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为$R=1$。

当$x=2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，级数发散。

当$x=0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，通项不趋于零，级数也发散。

所以收敛区域为$D=(0,2)$。

（3）设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以收敛半径为$R=\sqrt{2}$。

当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，级数收敛。

所以收敛区域为$D=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$。

（4）设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为$R=1$ 。

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$是 Leibniz 级数，所以收敛。

当$x=-2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，级数发散。

所以收敛区域为$D=(-2,0]$。

（5）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{3^n}\right]=0$，所以收敛半径为$R=+\infty$，收敛区域为$D=(-\infty,+\infty)$。

（6）设$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{\ln^2 n}{n^n}}=1$，所以收敛半径为$R=1$。

当$x=\pm 1$时，显然$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$收敛，所以收敛区域为$D=[-1,1]$。

（7）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]=\frac{1}{e}$，所以收敛半径为$R=e$。

当$x=\pm e$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$，应用 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ (n\to\infty),$$

可知级数的通项$\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛区域为$D=(-e,e)$。

（8）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]=\frac{1}{4}$，所以收敛半径为$R=4$。

当$x=\pm 4$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，应用 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\ (n\to\infty),$$

可知级数的通项$\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛区域为$D=(-4,4)$。

（9）设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]=1$，所以收敛半径为$R=1$。

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$是 Leibniz 级数，所以收敛。

当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，令$b_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$\lim_{n\to\infty}n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}$，由 Raabe 判别法可知级数发散。

所以收敛区域为$D=[-1,1)$。

2. 设 a＞b＞0，求下列幂级数的收敛域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$；

(3) $a\,x+b\,x^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^n x^{2n-1}+b^n x^{2n}+\cdots$。

解（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)}=a$，所以收敛半径为$R=\frac{1}{a}$。

当$x=-\frac{1}{a}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{b^n(-1)^n}{n^2a^n}\right)$，级数收敛。

当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{b^n}{n^2a^n}\right)$，级数发散。

所以收敛区域为 $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$。

（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{a}$，所以收敛半径为 $R=a$。

当 $x=\pm a$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛区域为 $D=(-a,a)$。

（3）设 $a\,x+b\,x^2+a^2\,x^3+b^2\,x^4+\cdots+a^n\,x^{2n-1}+b^n\,x^{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$，则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a^n}=\sqrt{a}$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{a}}$。

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛区域为 $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$。

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$。

解　（1）设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 R。

当 $|x|<\sqrt{R_1}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛，当 $|x|>\sqrt{R_1}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散，所以 $R=\sqrt{R_1}$。

（2）设 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R。

当$|x| < \min(R_1,R_2)$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 收敛。

当$|x| > \min(R_1,R_2)$，$R_1 \neq R_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 发散。

但当 $R_1 = R_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径有可能增加，例如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$，收敛半径为$1$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)x^n$ 收敛半径也为1，但$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为2。

所以$R \geq \min(R_1,R_2)$。

（3）设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$ 的收敛半径为R。

由$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}$，可知$R \geq R_1 R_2$。

上式等号可能不成立，例如$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$，收敛半径为$1$，

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$，收敛半径也为$1$，但$\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$ 的收敛半径为$R = +\infty$。

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质，求下列幂级数的和函数，并指出它们的定义域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$。

解 （1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，$f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}。$$

（2）级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$， $f(x)=xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，利用逐项求导，得到

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}。$$

（3）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$， $f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题（1），得到

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{n-1}n^2x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n = \frac{x}{(1+x)^2},$$

所以

$$S(x) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}。$$

（4）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm 1$时，级数收敛，所以

定义域为$D=[-1,1]$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$， $f(x)=xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，利用逐项求导，得到

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

于是$f'(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)$，所以

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)dx=1-(1-\frac{1}{x})\ln(1-x), \quad x\in[-1,1),$$

而$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$。注意$S(1)$也可利用$S(x)$在$[-1,1]$上的连续性，由极限$S(1)=\lim_{x\to1-}S(x)=1$得到。

（5）级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的收敛半径为$R=1$，当$x=\pm1$时，级数发散，所以定义域为$D=(-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$， $f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题（1），得到

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-1,$$

所以

$$S(x)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{2x}{(1-x)^3}。$$

（6）级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛半径为$R=+\infty$，所以定义域为$D=(-\infty,+\infty)$。

设$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，由$S(x)+S'(x)=e^x$与

$S(x)-S'(x)=e^{-x}$，即可得到

$$S(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})。$$

（7）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n}$的收敛半径为$R=+\infty$，所以定义域为$D=(-\infty,+\infty)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n}$，则$\int_{0}^{x}S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x(e^{x}-1)$，所以

$$S(x)=\frac{d}{dx}\left[x(e^{x}-1)\right]=(1+x)e^{x}-1。$$

注 本题也可直接利用例题 10.3.6，得到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}=(1+x)e^{x}-1。$$

5. 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$，则不论$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$在$x=r$是否收敛，只要$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}x^{n+1}$在$x=r$收敛，就成立

$$\int_{0}^{r}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_{0}^{1}\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}。$$

证 由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}x^{n+1}$在$x=r$收敛，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径至少为$r$，所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$的收敛半径也至少为$r$。当$x\in[0,r)$， 利用逐项积分，得到

$$\int_{0}^{x}f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}x^{n+1}。$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}r^{n+1}$收敛，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}x^{n+1}$在$[0,r]$连续，令$x\to r-$，得到

$$\int_{0}^{r}f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n}}{n+1}r^{n+1}。$$

对$f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$利用上述结果，就得到

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

6. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$。

证 （1）连续 4 次逐项求导，得到

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y。$$

（2）应用逐项求导，可得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}，\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!n!}，$$

于是

$$xy''+y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}=y。$$

7. 应用幂级数性质求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$；

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$；

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$。

解 （1）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，利用逐项求积分可得

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}，\quad 于是 \quad f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=f(\frac{1}{2})=\frac{2}{9}。$$

（2）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，利用逐项求导可得

$$f(x)=\ln\frac{1}{1-x}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=f(\frac{1}{2})=\ln 2。$$

（3）首先由逐项求积分可得 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$。设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$，

再利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{x^3}{(1-x)^2}，$$

于是

$$f(x)=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}=f(\frac{1}{4})=\frac{11}{27}。$$

（4）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$，利用逐项求积分可得

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}，$$

于是

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}，$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=f(\frac{1}{2})=12。$$

（5）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$，令 $g(x)=xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，利用逐项求导可得

$$g(x)=\arctan x，$$

于是

$$f(x)=\frac{\arctan x}{x}，$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}=f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi。$$

（6）首先由逐项求导可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$。设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$，令 $g(x)=xf(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^{n+1}$，则

$$g'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}=x\ln(1+x)，$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}，$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}=f(\frac{1}{2})=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}。$$

（7）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=e^{-x}，$$

因此 $f(x)=xg(x)=xe^{-x}$。所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=f(2)=\frac{2}{e^2}。$$

8．设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$，求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径。

解　设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$的收敛半径为$R_2$。由

$0\le a_n\le A_n$，可知$R_1\ge R_2$；又由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，可知$R_1\le 1$。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1,$$

可知$R_2=1$。结合上述关系，得到$R_1=1$。

9．设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$。

（1）证明$f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续，在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导；

（2）$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处的左导数是否存在？

证　（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$的收敛半径为$R=\frac{1}{2}$，且在$x=\pm\frac{1}{2}$，级数收敛，由 Abel 第二定理，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上一致收敛，所以$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续。

由于$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^n}{n^2}x^n\right)=\frac{2^n}{n}x^{n-1}$，且对任意$\delta>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\delta\right]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上内闭一致收敛，由函数项级数的逐项求导定理，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导，且$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$。

（2）$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处的左导数不存在。

令$t=2x$，则$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。令$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。利用逐项求导

定理，可以得到

$$g(t)=\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du\text{，}$$

其中$t\in[-1,1]$。应用 L'Hospital 法则，得到

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du-\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}du\right]$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-1}\int_1^t -\frac{\ln(1-u)}{u}du=\lim_{t\to1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty\text{。}$$