习　　题　6.3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$；　(2) $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$；

(3) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$；　(4) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$；

(5) $\int \frac{3}{x^3+1}dx$；　(6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$；

(7) $\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$；　(8) $\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$；

(9) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$；　(10) $\int \frac{dx}{x^4+1}$；

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；　(12) $\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx$；

(13) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx$；　(14) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$；

(15) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx$；　(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$。

解（1）$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)} + C$。

（2）$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$

设 $\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$，则

$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) \equiv 2x+3$，于是

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A-C=2 \\ B-D=3 \end{cases},$$

解得 $A=1,C=-1,B=\frac{3}{2},D=-\frac{3}{2}$。所以

$$\int\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{3}{2}\arctan x+C。$$

（3） $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}$，则

$$A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3+C(x+1)(x+3)^3$$

$$+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2\equiv x。$$

令 $x=-1$，得到 $A=-\frac{1}{8}$；令 $x=-2$，得到 $C=2$；令 $x=-3$，得到 $F=\frac{3}{2}$；再比较等式两边 x^5、x^4 的系数与常数项，得到

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ 13A+12B+C+11D+E=0 \\ 108A+54B+27C+36D+12E+4F=0 \end{cases}。$$

于是解得 $A=-\frac{1}{8},B=-5,C=2,D=\frac{41}{8},E=\frac{13}{4},F=\frac{3}{2}$，即

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=-\frac{1}{8(x+1)}-\frac{5}{x+2}+\frac{41}{8(x+3)}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{13}{4(x+3)^2}+\frac{3}{2(x+3)^3}。$$

所以

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)(x+2)^{40}}\right|-\frac{2}{x+2}-\frac{13}{4(x+3)}-\frac{3}{4(x+3)^2}+C\text{。}$$

（4） $\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\text{，}$$

所以

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x+2}-\arctan(x+2)-\int\frac{d(x+2)}{[1+(x+2)^2]^2}$$

$$=-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}-\frac{3}{2}\arctan(x+2)+C\text{。}$$

（5） $\int \frac{3}{x^3+1}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

（6）解一：$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}]+C\text{。}$$

解二：$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)dx}{x^4+x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)dx}{x^4+x^2+1}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{x+x^{-1}+1}{x+x^{-1}-1}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C\text{。}$$

注：本题的答案也可以写成 $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}+C$。

（7）$\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$

$$\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}=x^2-5x+21-\frac{80}{x+4}\text{，}$$

所以

$$\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+21x-80\ln|x+4|+C\text{。}$$

（8）$\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$

$$\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}=1-\frac{5x-7}{(x-1)(x^2+x+6)}=1+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}\frac{x+22}{x^2+x+6}\text{，}$$

所以

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx=x+\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+6}-\frac{43}{4\sqrt{23}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{23}}+C\text{。}$$

（9）$\int \frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$。

(10) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ $\int \frac{dx}{x^4+1}=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1))+C\text{。}$$

(11) $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(12) $\int\frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x^2+x^3-(x^3-1)}{x(x^3-1)}dx=\int\frac{x+x^2}{x^3-1}dx-\int\frac{dx}{x}$

$$=\int\frac{x}{x^3-1}dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

(13) $\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C\text{。}$$

(14) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\frac{1+x^7}{x(1+x^7)}dx-\int\frac{2x^6}{1+x^7}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{2}{7}\int\frac{dx^7}{1+x^7}$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln\left|1+x^7\right|+C\text{。}$$

(15) $$\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx=\frac{1}{10}\int\frac{d(x^{10}+2x^5+2)}{(x^{10}+2x^5+2)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5+1)}{[1+(x^5+1)^2]^2}$$

$$=-\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$$

$$=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C\text{。}$$

(16) $$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{2n}\int\frac{x^n}{(x^{2n}+1)^2}dx^{2n}=-\frac{1}{2n}\int x^n d\,\frac{1}{x^{2n}+1}$$

$$=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\int\frac{dx^n}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}+\frac{1}{2n}\arctan x^n+C\text{。}$$

2. 在什么条件下，$f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数仍是有理函数？

解 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$可化为部分分式 $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$，于是

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\equiv ax^2+bx+c\text{，}$$

要使$f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数为有理函数，必须$A=0,B=0$，由此可得 $a=0,c=0$。

3. 设$p_n(x)$是一个n次多项式，求

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx\text{。}$$

解 由于$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$，所以

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)}\frac{1}{(x-a)^{n-k}}+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C\text{。}$$

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$；　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$；　(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$；　(6) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$；

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$；　(8) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；　(10) $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx$。

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$；　(12) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$；

解（1） $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx = \frac{1}{2}\int xd\sqrt{2+4x} = \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+4x}dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{12}\sqrt{(2+4x)^3} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x-1)\sqrt{2+4x} + C$$ 。

（2）不妨设 $a<b$，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}} = \arcsin\frac{2x-a-b}{b-a} + C$$ 。

注：本题也可令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$，解得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$$ 。

（3） $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = -\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

$$= -\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$$ 。

(4) $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+x^{-2}}}dx=\int\frac{d(x-x^{-1})}{\sqrt{(x-x^{-1})^2+2}}$

$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$。

注：这里假设 $x>0$，当 $x<0$ 时可得到相同的答案。

(5) $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}dx=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$。

注：本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解。

(6) $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$。

注：本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解。

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(1+x)}\right|+c$

$=2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+C$。

(8) 设 $x=\tan t$，则

$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2 t dt}{\tan^4 t\sec t}=\int\frac{\cos^3 t dt}{\sin^4 t}=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d\sin t$

$=-\frac{1}{3\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t}+c=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C$。

(9) 设 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$，于是

$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int(t-1+\frac{1}{t+1})\ dt$

$=2t^2-4t+4\ln|t+1|+c=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$。

（10）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-4}{x+1}}$，则 $x=\dfrac{4+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{15t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx=\int t^2\frac{(1-t^3)^2}{25}\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}dx=\frac{3}{5}\int t^4dt$$

$$=\frac{3}{25}t^5+c=\frac{3}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^5}+C。$$

（11）设$t=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}$，则 $x=\dfrac{2+t^3}{1-t^3}$，$dx=\dfrac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1-t^3}{3}\cdot\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}dt=3\int\frac{tdt}{1-t^3}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2}+\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2})-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}+C。$$

（12）设$t=\sqrt[4]{1+x^4},x^4=t^4-1$，于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^3dt}{(t^4-1)t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan t+c=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+C。$$

5. 设$R(u,v,w)$是u,v,w的有理函数，给出

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

的求法。

解　设$t=\sqrt{a+x}$，则

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx = 2\int R(t^2-a,t,\sqrt{t^2-a+b})tdt$$

再令 $\sqrt{t^2-a+b}=t+u$，则 $t=\dfrac{b-a-u^2}{2u}$，从而

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\,dx$$

$$=\int R((\frac{b-a-u^2}{2u})^2-a,\frac{b-a-u^2}{2u},\frac{b-a+u^2}{2u})\frac{b-a-u^2}{2u}\cdot\frac{a-b-2u^2}{2u^2}du$$

为有理函数的积分。

6. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{4+5\cos x}$；

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sin x}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$；

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$；

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$；

(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}$；

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$；

(9) $\displaystyle\int\tan x\tan(x+a)dx$；

(10) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$；

(11) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$；

(12) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$。

解（1）设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$, 则 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\int\frac{2du}{9-u^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|+c=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C\text{。}$$

（2）设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$, 则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}, x=2\arctan u, dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{du}{1+u+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C\text{。}$$

（3） $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x+1}=-\int\frac{d\cot x}{4+3\cot^2 x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x+C$。

注：本题也可通过作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$，解得

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})+C\text{。}$$

（4） $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2(\tan\frac{x}{2}+1)}dx$

$$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}d\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C\text{。}$$

（5）设 $u=\tan\frac{x}{2}$, 则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},x=2\arctan u,dx=\frac{2du}{1+u^2}$，

于是

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{du}{3u^2+2u+2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C\text{。}$$

（6） $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin xdx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{2+\cos x+1-\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}d\cos x$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)d\cos x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\cos x}{2+\cos x}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C\text{。}$$

（7） $\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}=\int\frac{\cos xdx}{\sin x(1+\cos x)}=-\int\frac{\cos xd\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+\cos x)-(1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}d\cos x=-\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(1+\cos x)}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C\text{。}$$

（8） $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left(\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right)dx=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C\text{。}$$

（9） $\int\tan x\tan(x+a)dx$

当 $a=\frac{k\pi}{2}$ 时， 原积分容易求得。

当 $a\neq\frac{k\pi}{2}$ 时，

$$\int\tan x\tan(x+a)dx=\int\left(\frac{\tan(x+a)-\tan x}{\tan a}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{\tan a}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C\text{。}$$

（10） $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc(x+\frac{\pi}{4})d(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+C\text{。}$$

（11） $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$

$$=\tan x-\cot x+C=-2\cot 2x+C\text{。}$$

（12） $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin^2 x-1}{1+\sin^2 x}dx=x-\int\frac{d\tan x}{1+2\tan^2 x}$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C\text{。}$$

7. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}dx$；　(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；　(4) $\int \sqrt{x}\ \ln^2 x\,dx$；

(5) $\int x^2\mathrm{e}^x \sin x dx$；　(6) $\int \ln(1+x^2)dx$

(7) $\int \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx$；

(9) $\int \arctan\sqrt{x}dx$；　(10) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$

(11) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；　(12) $\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$；

(13) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；　(14) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$；

(15) $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；　(16) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$（$ab\neq 0$）；

(17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；　(18) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；

(19) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$；　(20) $\int \frac{dx}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$。

解 (1) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}dx=-\int x\mathrm{e}^x d\frac{1}{1+x}=-\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}(e^x+xe^x)dx=\frac{e^x}{1+x}+C$。

(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int \ln x d\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\ln x-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$。

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int\sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$。

(4) $\int\sqrt{x}\ \ln^2 x\,dx=\frac{2}{3}\int\ln^2 x dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx$

$=\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln^2 x-4\ln x)+\frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9\ln^2 x-12\ln x+8)+C$。

(5) $\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx=\int x^2\sin x d\,\mathrm{e}^x=x^2\,\mathrm{e}^x\sin x-\int e^x(2x\sin x+x^2\cos x)dx$

$=\mathrm{e}^x(x^2\sin x-2x\sin x-x^2\cos x)+\int\mathrm{e}^x(2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x)dx$，

于是

$\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x^2\sin x-2x\sin x-x^2\cos x)+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x(2\sin x+4x\cos x)dx$。

由于

$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$，

$\int e^x x\cos x dx=\int x\cos x de^x=e^x x\cos x-\int e^x(\cos x-x\sin x)dx$

$=e^x x\cos x-\int e^x\cos x dx+\int x\sin x de^x$

$=e^x x(\cos x+\sin x)-\int e^x\cos x dx-\int e^x(\sin x+x\cos x)dx$，

从而

$\int e^x x\cos x dx=\frac{1}{2}e^x x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\int e^x(\cos x+\sin x)dx$

$=\frac{1}{2}e^x x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}e^x\sin x+C$，

所以

$\int x^2\,\mathrm{e}^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]+C$。

(6) $\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$。

(7) $\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\arcsin xd\arcsin x-\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\text{，}$$

所以

$$\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\text{。}$$

（8） $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}dx^{-1}$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{9}-(x^{-1}+\frac{1}{3})^2}}d(x^{-1}+\frac{1}{3})=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3+x}{2x}+C\text{。}$$

注：本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$，解得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{3x+3}{x-3}}+C\text{。}$$

（9） $\int\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\int\frac{d\sqrt{x}}{1+x}$

$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C\text{。}$$

（10） 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx=2\int t^2\sin tdt=-2t^2\cos t+4\int t\cos tdt$$

$$=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin tdt=(4-2t^2)\cos t+4t\sin t+c$$

$$=(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C\text{。}$$

（11） $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)=x\tan\frac{x}{2}+C\text{。}$$

（12） $\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin^2 x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}+\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1+\sin x}\right)d\sin x$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x+\sqrt{1+\sin x}$，

在等式右边的积分中，令$t=\sqrt{1+\sin x}$，则

$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}d\sin x=\int\frac{2t^2dt}{2-t^2}=-2t+4\int\frac{dt}{2-t^2}=-2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|+C$，

所以

$$\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}+C。$$

（13） $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}d\tan x=\tan^2 x\sin x-\int\tan x(\sin x+\tan x\sec x)dx$，

所以

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\tan x\sin xdx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x\sin x-\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+\frac{1}{2}\sin x+C$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+C。$$

（14） $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int e^{\sin x}xd\sin x-\int e^{\sin x}d\sec x$

$=e^{\sin x}(x-\sec x)-\int e^{\sin x}dx+\int\sec x e^{\sin x}\cos xdx$

$=e^{\sin x}(x-\sec x)+C$。

（15） $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{de^x}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$。

（16） $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int\frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$。

（17） 令$t=\sqrt[6]{x}$，则$x=t^6$，于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{6}{t(t+1)}dx = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C\text{。}$$

（18） $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int x^2\frac{1}{1-x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C\text{。}$$

（19） $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{2}x^2 - \int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx + \int\arcsin xd\arcsin x\text{，}$$

所以

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin xdx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\int\arcsin xd\arcsin x$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + C\text{。}$$

（20）令 $t = e^x$，则

$$\int\frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int\frac{dt}{t(1+t)^2} = \int\left(\frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{1}{1+t} + c = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + C\text{。}$$