第十五章　含参变量积分

习　题　15.1　含参变量的常义积分

1．　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$。

解（1）由积分中值定理，可得

$$\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}\quad（\xi\text{在}1\text{与}1+\alpha\text{之间}），$$

于是

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}。$$

（2）由连续性定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}。$$

2．设 $f(x,y)$ 当 y 固定时，关于 x 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $y\to y_0-$ 时，它关于 y 单调增加地趋于连续函数 $\phi(x)$，证明

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\phi(x)dx。$$

证 若能证明 $\lim\limits_{y\to y_0-}f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\forall x\in[a,b]$：$|f(x,y)-\phi(x)|<\varepsilon$，则

$$\left|\int_a^b(f(x,y)-\phi(x))dx\right|\le\int_a^b|f(x,y)-\phi(x)|dx<(b-a)\varepsilon，$$

就有

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\phi(x)dx。$$

以下用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-}f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的。

若不然，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\exists x\in[a,b]$：

$$\left|f(x,y)-\phi(x)\right|\ge\varepsilon_0。$$

依次取$\delta_1=1$，$\exists y_1\in(y_0-\delta_1,y_0)$，$\exists x_1\in[a,b]$：$\left|f(x_1,y_1)-\phi(x_1)\right|\ge\varepsilon_0$；

$\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},y_0-y_1\right\}$，$\exists y_2\in(y_0-\delta_2,y_0)$，$\exists x_2\in[a,b]$，$\left|f(x_2,y_2)-\phi(x_2)\right|\ge\varepsilon_0$；

$$\cdots\cdots$$

$\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},y_0-y_{n-1}\right\}$，$\exists y_n\in(y_0-\delta_n,y_0)$，$\exists x_n\in[a,b]$，$\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\ge\varepsilon_0$；

$$\cdots\cdots。$$

由此得到两列数列$\{x_n\},\{y_n\}$。由于$\{x_n\},\{y_n\}$有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在收敛子列$\{x_{n_k}\},\{y_{n_k}\}$，为叙述方便，仍记这两个子列为$\{x_n\},\{y_n\}$，其中$\{y_n\}$是递增的，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由 $f(\xi,y)\to\phi(\xi)\,(y\to y_0-)$，可知$\exists\delta>0,\ \forall y(-\delta<y-y_0<0)$：

$$\left|f(\xi,y)-\phi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

注意$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，取足够大的$K$使得$-\delta<y_K-y_0<0$，从而

$$\left|f(\xi,y_K)-\phi(\xi)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

又 $f(x,y_K)-\phi(x)$ 在 $x=\xi$ 点连续以及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，$\exists N>0,$ 当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\big(f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\big)-\big(f(\xi,y_K)-\phi(\xi)\big)\right|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

于是

$$\left|f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\right|<\varepsilon_0。$$

但是对固定的x_n，当$y\to y_0-$时，$f(x_n,y)$关于y单调递增地趋于$\phi(x_n)$，所以当$n>\max\{N,K\}$时，成立

$$\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\le\left|f(x_n,y_K)-\phi(x_n)\right|<\varepsilon_0,$$

这与 $\left|f(x_n,y_n)-\phi(x_n)\right|\ge\varepsilon_0$，$(n=1,2,\cdots)$矛盾。

3. 用交换积分顺序的方法计算下列积分：

（1）$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}\quad(1>a>0)$。

解（1）$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$，

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\text{，}$$

于是

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{1+(y+1)^2}\text{，}$$

所以

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{dy}{1+(y+1)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)\text{。}$$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}=2\int_0^a dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cot x}{\cot^2 x+1-y^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{\cot x}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}}\text{，}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=\pi\int_0^a\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin a\text{。}$$

4. 求下列函数的导数：

（1）$I(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}dx$；

（2）$I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}dx$；

（3）$F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$。

解（1）$I'(y)=2ye^{-y^5}-e^{-y^3}-\int_y^{y^2}x^2e^{-x^2y}dx$。

（2）$I'(y)=\dfrac{2\cos y^3-\cos y^2}{y}-\int_y^{y^2}\sin(xy)dx=\dfrac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$。

（3）设 $g(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$，则

$$g_t(x,t)=-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt)\text{，}$$

所以

$$F'(t)=\int_0^{t^2}g_t(x,t)dx+2tg(t^2,t)$$

$$=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xtdx$$

$$+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)dy。$$

5. 设$I(y)=\int_0^y (x+y)f(x)dx$，其中$f$为可微函数，求$I''(y)$。

解 $I'(y)=2yf(y)+\int_0^y f(x)dx$，

$I''(y)=3f(y)+2yf'(y)$。

6. 设$F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|dx \quad (a<b)$，其中$f(x)$为可微函数，求$F''(y)$。

解 当$y\le a$时，$F(y)=\int_a^b f(x)(x-y)dx$，于是

$$F'(y)=-\int_a^b f(x)dx，\quad F''(y)=0\ ；$$

当$y\ge b$时，$F(y)=\int_a^b f(x)(y-x)dx$，于是

$$F'(y)=\int_a^b f(x)dx，\quad F''(y)=0\ ；$$

当$a<y<b$时，$F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)dx+\int_y^b f(x)(x-y)dx$，于是

$$F'(y)=\int_a^y f(x)dx-\int_y^b f(x)dx，\quad F''(y)=2f(y)。$$

7. 设函数$f(x)$具有二阶导数，$F(x)$是可导的，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，$$

以及初始条件$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

证 直接计算，可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[-af'(x-at)+af'(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[aF(x+at)+aF(x-at)\right]，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}\left[f''(x-at)+f''(x+at)\right]+\frac{a}{2}\left[F'(x+at)-F'(x-at)\right]，$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[f'(x-at)+f'(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[F(x+at)-F(x-at)\right]，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left[f''(x-at)+f''(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\left[F'(x+at)-F'(x-at)\right]，$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，$$

且显然成立 $u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

8．利用积分号下求导法计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2 x)dx \quad (a>1)$；

（2）$\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx \quad (|\alpha|<1)$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx$。

解（1）设$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2 x)dx$，则

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2-\sin^2 x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2\cot^2 x+a^2-1}d\cot x$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

于是

$$I(a)=\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C。$$

令$a\to 1+$，则

$$C=I(1)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx=-\pi\ln 2,$$

所以

$$I(a)=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}。$$

（2）设$I(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$，则$I(0)=0$。设$\alpha\neq 0$，由于

$$I'(\alpha)=\int_0^{\pi} \frac{2\alpha-2\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx,$$

作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$，得到

$$I'(\alpha)=4\int_0^{+\infty} \frac{\alpha-1+(\alpha+1)t^2}{[(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2 t^2](1+t^2)}dt$$
$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}+2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2 t^2}$$
$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t\right)}{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 t^2}=0,$$

所以$I(\alpha)=C$，再由$I(0)=0$，得到

$$I(\alpha)=0 \quad (|\alpha|<1)。$$

（3）设$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx$，且不妨设$a>0$，$b>0$。

当$a=b$时，$I(a)=\pi\ln|a|$。以下设 $a\neq b$。

由于

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,$$

记

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,\quad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx,$$

则

$$a^2A+b^2B=\frac{\pi}{2},$$

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}。$$

由此解得

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{1}{a(a+b)},$$

于是

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b},$$

积分后得到

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C。$$

由 $I(0)=\pi\ln\frac{b}{2}$，得到 $C=-\pi\ln 2$，从而 $I(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$，或者一般地有

$$I(a)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}。$$

9．证明：第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt\qquad(0<k<1)$$

满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0。$$

证 直接计算，有

$$E'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt,$$

$$E''(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^4 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{k^2(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt,$$

于是

$$E''(k)=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}d\sin t$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t d\frac{\sin t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt，$$

所以

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k^2-1)\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt+\frac{E(k)}{1-k^2}=0。$$

10．设函数 $f(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数。证明：函数

$$w(x,y,z)=\int_0^{2\pi}f(x+z\cos\varphi,\ y+z\sin\varphi)d\varphi$$

满足偏微分方程

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}。$$

证　由直接计算，可得

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\int_0^{2\pi}f_u d\varphi，\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\int_0^{2\pi}f_{uu}d\varphi，$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\int_0^{2\pi}f_v d\varphi，\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\int_0^{2\pi}f_{vv}d\varphi，$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\int_0^{2\pi}(f_u\cos\varphi+f_v\sin\varphi)d\varphi，$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\int_0^{2\pi}(f_{uu}\cos^2\varphi+f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\sin^2\varphi)d\varphi，$$

于是

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=z\int_0^{2\pi}(f_{uu}\sin^2\varphi-f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\cos^2\varphi)d\varphi。$$

另一方面，由分部积分可得

$$\int_0^{2\pi}f_u\cos\varphi d\varphi=-\int_0^{2\pi}[f_{uu}(-z\sin\varphi)+f_{uv}z\cos\varphi]\sin\varphi d\varphi，$$

$$\int_0^{2\pi}f_v\sin\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}[f_{vu}(-z\sin\varphi)+f_{vv}z\cos\varphi]\cos\varphi d\varphi，$$

所以

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}\text{。}$$

11．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$。研究函数

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性。

解　设 $y_0\neq 0$，由于 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在 $[0,1]\times[y_0-\frac{|y_0|}{2},y_0+\frac{|y_0|}{2}]$ 上连续，可知 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 在 $y_0\neq 0$ 处连续。

设 $y_0=0$，则 $I(y_0)=I(0)=0$。由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $m>0$，当 $y>0$ 时，成立 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\geq\frac{my}{x^2+y^2}$，于是

$$I(y)\geq m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}dx=m\arctan\frac{1}{y}\text{，}$$

由 $\lim\limits_{y\to 0+}(m\arctan\frac{1}{y})=\frac{m\pi}{2}>0$，可知 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)\neq 0=I(0)$，即 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 在 $y_0=0$ 处不连续。

注　在本题中可证明 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(0)\neq 0$，由此也说明了 $I(y)$ 在 $y=0$ 点不连续。证明如下：

$\forall\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使得当 $0<x<\eta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则

$$|\int_0^\eta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}\text{。}$$

对固定的 $\eta>0$，取 $\delta>0$，使得当 $0<|y|<\delta$ 时，$|\int_\eta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\varepsilon\text{。}$$

分别令 $y\to 0+$ 与 $y\to 0-$，由

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)\text{，}\quad\lim_{y\to 0-}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=-\frac{\pi}{2}f(0)$$

和ε的任意性，即可得到$\lim\limits_{y\to 0+} I(y)=\dfrac{\pi}{2}f(0)$与$\lim\limits_{y\to 0-} I(y)=-\dfrac{\pi}{2}f(0)$。