习　题　6.1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx$；　(2) $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)dx$；

(3) $\int (x^a+a^x)dx$；　(4) $\int (2+\cot^2 x)dx$；

(5) $\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx$；　(6) $\int (x^2-2)^3 dx$；

(7) $\int (x+\frac{1}{x})^2 dx$；　(8) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$；

(9) $\int \left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2 dx$；　(10) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$；

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；　(12) $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$；

(13) $\int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$；　(14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

解（1）$\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx=\int x^3dx+2\int x^2dx-5\int \sqrt{x}dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$。

（2）$\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)dx=\int \sin xdx+3\int e^xdx=-\cos x+3e^x+C$。

（3）$\int (x^a+a^x)dx=\int x^adx+\int a^xdx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a\neq 1)$。

（4）$\int (2+\cot^2 x)dx=\int (1+\csc^2 x)dx=x-\cot x+C$。

（5）$\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)dx=2\int \csc^2 xdx-\int \sec x\tan xdx=-2\cot x-\sec x+C$。

（6）$\int (x^2-2)^3 dx=\int (x^6-6x^4+12x^2-8)dx=\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{5}x^5+4x^3-8x+C$。

（7）$\int (x+\frac{1}{x})^2 dx=\int (x^2+2+\frac{1}{x^2})dx=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$。

（8）$\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\int (2+\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=2x-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$。

（9） $\int\left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2dx=\int\left(4^x+2\cdot(\frac{2}{3})^x+\frac{1}{9^x}\right)dx$

$$=\frac{1}{\ln 4}4^x+\frac{2}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x-\frac{1}{\ln 9}\frac{1}{9^x}+C\text{。}$$

（10） $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int 2dx-5\int(\frac{2}{3})^x dx=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\cdot(\frac{2}{3})^x+C$。

（11） $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$。

（12） $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x^2}-3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arctan x-3\arcsin x+C$。

（13） $\int(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{11}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}}+C$。

（14） $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\csc^2 xdx-\int\sec^2 xdx$

$$=-\cot x-\tan x+C=-2\csc 2x+C\text{。}$$

2. 曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(\mathrm{e},-1)$，且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

解 由题意，曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$，于是 $y=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$，将点 $(\mathrm{e},-1)$ 代入，得 $C=-2$，所以曲线的方程为 $y=\ln|x|-2$。

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在任意一点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1，

（1） 求出该曲线方程的所有可能形式，并在直角坐标系中画出示意图；

（2） 若已知该曲线经过 $(1,1)$ 点，求该曲线的方程。

解（1）由题意可得 $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{x}-1$，所以 $y=\int(\sqrt[3]{x}-1)dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$，这

就是所求曲线方程的所有可能形式。

（2）将点$(1,1)$代入上述方程，可得$C=\frac{5}{4}$，所以过点$(1,1)$的曲线方程为$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}$。