习题　16.3 Fourier 级数的性质

1.　由例 16.1.2 的结果

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx，\qquad x\in(-\pi,\pi)，$$

用逐项积分法求 x^2 和 x^3 的 Fourier 级数。

解　由于 x 在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积，其 Fourier 级数可以逐项积分，

$$x^2 = 2\int_0^x t dt = 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt dt$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nt - 1) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt \text{（习题 16.2.7.(1)）}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx，\quad x\in[-\pi,\pi]。$$

对 $3x^2$ 的 Fourier 级数逐项积分，

$$x^3 = 3\int_0^x t^2 dt = 3\int_0^x \frac{\pi^2}{3}dt + 12\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt dt$$

$$= \pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2 n^2)}{n^3}\sin nx，\quad x\in(-\pi,\pi)。$$

2．证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛。

证　设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)，$$

令

$$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt\text{。}$$

根据定理 16.3.2 的证明过程，$F(x)$满足 Dini-Lipschitz 判别法的推论的条件，$F(x)$可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)，\quad x\in[-\pi,\pi]，$$

令$x=0$，得到$F(0)=\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$，这就说明了级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

3．说明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$点点收敛，但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

解 对于任意固定的x，$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{\ln\ln n}\right\}$单调趋于 0，$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$有界，根据 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$收敛。

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\ln n}$都是发散的，所以这两个级数不可能是可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

4．利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。

证 因为$f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}\text{。}$$

5．利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,\pi)\\ -x & x\in[-\pi,0)\end{cases}\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\text{，}$$

和 Parseval 等式，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$。

解　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right]^2\text{，}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\left(\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^4}{96}\text{。}$$

6．利用

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\text{，}\quad x\in(-\pi,\pi)$$

和 Parseval 等式，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

解　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{2}{5}\pi^4=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2\text{，}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\frac{2}{5}\pi^4-\frac{2}{9}\pi^4\right)\frac{1}{16}=\frac{\pi^4}{90}\text{。}$$

7．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期，且具有二阶连续导数的函数，记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\text{，}\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nxdx\text{。}$$

证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n''$绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

证　利用分部积分法，

$$\begin{aligned}
b_n'' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\right] \\
&= \frac{n}{\pi}\left[-f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] = -n^2 b_n，
\end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2 b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2 b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)\quad (n=1,2,\cdots)，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

8．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续函数。证明：若 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零，则 $f(x)\equiv 0$。

证　由于 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零，利用 Parseval 等式，可知 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=0$。再由 $f(x)$ 为连续函数，即可得到 $f(x)\equiv 0$。

9．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的任意一个连续函数，证明对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在三角多项式

$$\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)，$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|dx<\varepsilon。$$

证　设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)。$$

因为 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2+{b_n}^2)\text{，}$$

可知 $\forall\varepsilon>0$， $\exists N$， $\forall n>N$， $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}({a_k}^2+{b_k}^2)<\dfrac{\varepsilon^2}{2\pi^2}$。令

$$\psi_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad (n>N)\text{，}$$

则由定理 16.3.3，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\,dx=\sum_{k=n+1}^{\infty}({a_k}^2+{b_k}^2)<\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}\text{。}$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|\,dx\le\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\,dx\cdot\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx}$$

$$=\sqrt{2\pi^2\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\,dx}<\varepsilon\text{。}$$