

第一章 集合与映射

习 题 1.1 集合

证明由 n 个元素组成的集合 $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 有 2^n 个子集。

解 由 k 个元素组成的子集的个数为 C_n^k , $\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$ 。

证明：

(1) 任意无限集必包含一个可列子集；

(2) 设 A 与 B 都是可列集，证明 $A \cup B$ 也是可列集。

证 (1) 设 T 是一个无限集，先取 $a_1 \in T$ 。由于 T 是无限集，必存在 $a_2 \in T$, $a_2 \neq a_1$ 。再由 T 是无限集，必存在 $a_3 \in T$, $a_3 \neq a_1, a_3 \neq a_2$ 。这样的过程可以无限进行下去，于是得到可列集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $S \subset T$ 。

(2) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, 则 $A \cup B$ 可表示为

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}。$$

指出下列表述中的错误：

(1) $\{0\} = \emptyset$ ；

(2) $a \subset \{a, b, c\}$ ；

(3) $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$ ；

(4) $\{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b\}$ 。

解 (1) $\{0\}$ 是由元素 0 构成的集合，不是空集。

(2) a 是集合 $\{a, b, c\}$ 的元素，应表述为 $a \in \{a, b, c\}$ 。

(3) $\{a,b\}$ 是集合 $\{a,b,c\}$ 的子集,应表述为 $\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$ 。

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}$ 是由 a,b 和 $\{a,b\}$ 为元素构成的集合,所以

$$\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\},\text{但}\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}。$$

用集合符号表示下列数集:

- (1) 满足 $\frac{x-3}{x+2}\leq 0$ 的实数全体;
- (2) 平面上第一象限的点的全体;
- (3) 大于0并且小于1的有理数全体;
- (4) 方程 $\sin x \cot x = 0$ 的实数解全体。

解 (1) $\{x|-2 < x \leq 3\}$ 。

(2) $\{(x,y)|x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$ 。

(3) $\{x|0 < x < 1 \text{ 且 } x \in \mathbb{Q}\}$ 。

(4) $\left\{x|x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 。

证明下列集合等式:

(1) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$;

(2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 。

证 (1) 设 $x \in A \cap (B \cup D)$,则 $x \in A$,并且或者 $x \in B$,或者 $x \in D$ 。于是或者 $x \in A \cap B$,或者 $x \in A \cap D$,即 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap D)$,因此

$$A \cap (B \cup D) \subset (A \cap B) \cup (A \cap D);$$

设 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap D)$,则或者 $x \in A \cap B$,或者 $x \in A \cap D$ 。于是 $x \in A$,并且或者 $x \in B$,或者 $x \in D$,即 $x \in A \cap (B \cup D)$,因此

$$A \cap (B \cup D) \supset (A \cap B) \cup (A \cap D)。$$

(2) 设 $x \in (A \cup B)^C$, 则 $x \notin A \cup B$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 于是 $x \in A^C \cap B^C$, 因此

$$(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C ;$$

设 $x \in A^C \cap B^C$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 即 $x \notin A \cup B$, 于是 $x \in (A \cup B)^C$, 因此

$$(A \cup B)^C \supset A^C \cap B^C .$$

举例说明集合运算不满足消去律 :

$$(1) A \cup B = A \cup C \quad \not\supset \quad B = C ;$$

$$(2) A \cap B = A \cap C \quad \not\supset \quad B = C .$$

其中符号 “ $\not\supset$ ” 表示左边的命题不能推出右边的命题。

解 (1) 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c, d\}$, 则 $A \cup B = A \cup C$, 但 $B \neq C$ 。

(2) 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$, 则 $A \cap B = A \cap C$, 但 $B \neq C$ 。

下述命题是否正确? 不正确的话, 请改正。

$$(1) x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 并且 } x \notin B ;$$

$$(2) x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 或者 } x \notin B .$$

解 (1) 不正确。 $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ 或者 $x \notin B$ 。

(2) 不正确。 $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ 并且 $x \notin B$ 。

习 题 1.2 映射与函数

1. 设 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}, T = \{a, b, c\}$, 问有多少种可能的映射 $f : S \rightarrow T$? 其中哪些是双射?

解 有 $3^3 = 27$ 种可能的映射, 其中有 $3! = 6$ 种是双射, 它们是

$$f: \begin{cases} \alpha \mapsto a \\ \beta \mapsto b \\ \gamma \mapsto c \end{cases}, f: \begin{cases} \alpha \mapsto a \\ \beta \mapsto c \\ \gamma \mapsto b \end{cases}, f: \begin{cases} \alpha \mapsto b \\ \beta \mapsto c \\ \gamma \mapsto a \end{cases}, f: \begin{cases} \alpha \mapsto b \\ \beta \mapsto a \\ \gamma \mapsto c \end{cases}, f: \begin{cases} \alpha \mapsto c \\ \beta \mapsto a \\ \gamma \mapsto b \end{cases}, f: \begin{cases} \alpha \mapsto c \\ \beta \mapsto b \\ \gamma \mapsto a \end{cases}.$$

2. (1) 建立区间 $[a, b]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应;

(2) 建立区间 $(0, 1)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 之间的一一对应。

解 (1) $f: [a, b] \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto y = \frac{x-a}{b-a};$$

(2) $f: (0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$

$$x \mapsto \tan\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi = -\cot(\pi x).$$

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数, 并指出定义域与值域:

(1) $y = f(u) = \log_a u, u = g(x) = x^2 - 3;$

(2) $y = f(u) = \arcsin u, u = g(x) = e^x;$

(3) $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}, u = g(x) = \sec x;$

(4) $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$

解 (1) $y = \log_a(x^2 - 3)$, 定义域: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$;

(2) $y = \arcsin 3^x$, 定义域: $(-\infty, 0]$, 值域: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $y = |\tan x|$, 定义域: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, 值域: $[0, +\infty)$;

$$(4) y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \text{ 定义域: } (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), \text{ 值域: } [0, 1) \cup (1, +\infty)。$$

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的：

$$(1) y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad (2) y = \frac{1}{3} \log_a^3(x^2-1)。$$

解 (1) $y = \arcsin u$, $u = \frac{1}{\sqrt{v}}$, $v = x^2 + 1$;

(2) $y = \frac{1}{3} u^3$, $u = \log_a v$, $v = x^2 - 1$ 。

5. 求下列函数的自然定义域与值域：

(1) $y = \log_a \sin x$ ($a > 1$);

(2) $y = \sqrt{\cos x}$;

(3) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$;

(4) $y = x^2 + \frac{1}{x^4}$ 。

解 (1) 定义域： $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, 值域： $(-\infty, 0]$;

(2) 定义域： $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$, 值域： $[0, 1]$;

(3) 定义域： $[-4, 1]$, 值域： $\left[0, \frac{5}{2} \right]$;

(4) 定义域： $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域： $\left[\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}, +\infty \right)$ 。

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同？

(1) $f(x) = \log_a(x^2)$, $g(x) = 2\log_a x$;

(2) $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$, $g(x) = 1$;

(3) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $g(x) = 1$ 。

解 (1) 函数 f 和 g 不等同；

(2) 函数 f 和 g 不等同；

(3) 函数 f 和 g 等同。

7. (1) 设 $f(x+3) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, 求 $f(x)$ ；

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3x-1}{3x+1}$, 求 $f(x)$ 。

解 (1) 令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$, 代入等式, 得到

$$f(t) = 2(t-3)^3 - 3(t-3)^2 + 5(t-3) - 1 = 2t^3 - 21t^2 + 77t - 97,$$

$$\text{所以 } f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 77x - 97;$$

(2) 令 $\frac{x}{x-1} = t$, 则 $x = \frac{t}{t-1}$, 代入等式, 得到

$$f(t) = \frac{\frac{3t}{t-1} - 1}{\frac{3t}{t-1} + 1} = \frac{2t+1}{4t-1}, \text{ 所以 } f(x) = \frac{2x+1}{4x-1}.$$

8. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f \circ f \circ f \circ f$ 的函数表达式。

解 (1) $f \circ f(x) = \frac{x+1}{x+2}$;

$$f \circ f \circ f(x) = \frac{x+2}{2x+3};$$

$$f \circ f \circ f \circ f(x) = \frac{2x+3}{3x+5}.$$

9. 证明: 定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和。

证 显然 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数, 而

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

10. 写出折线 \overline{ABCD} 所表示的函数关系 $y = f(x)$ 的分段表示, 其中

$$A = (0,3), B = (1,-1), C = (3,2), D = (4,0).$$

解
$$y = \begin{cases} -4x+3 & x \in [0,1] \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} & x \in (1,3] \end{cases}。$$

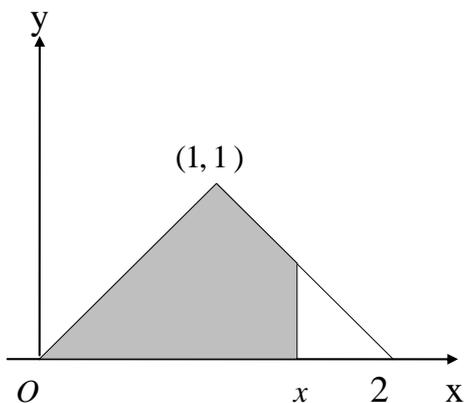


图 1.2.8

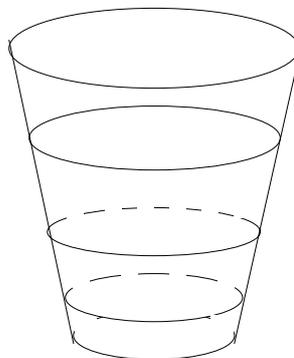


图 1.2.9

11. 设 $f(x)$ 表示图1.2.8中阴影部分面积，写出函数 $y = f(x)$, $x \in [0, 2]$ 的表达式。

解
$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1] \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & x \in (1,2] \end{cases}。$$

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，比重分别为13.6，1，0.8克/厘米³(图1.2.9)，上层煤油液体高度为5厘米，中层水液体高度为4厘米，下层汞液体高度为2厘米，试求压强 P 与液体深度 x 之间的函数关系。

解
$$P(x) = \begin{cases} 78.4x & x \in [0,5] \\ 98x - 98 & x \in (5,9] \\ 1332.8x - 11211.2 & x \in (9,11] \end{cases}。$$

13. 试求定义在 $[0, 1]$ 上的函数，它是 $[0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应，

但在 $[0, 1]$ 的任一子区间上都不是单调函数。

解 $f(x) = \begin{cases} x & x \text{ 为有理数} \\ 1-x & x \text{ 为无理数} \end{cases} \circ$