第十六章　Fourier 级数

习题　16.1　函数的 Fourier 级数展开

1. 设交流电的变化规律为 $E(t)=A\sin\omega t$，将它转变为直流电的整流过程有两种类型：

⑴　半波整流（图 16.1.5(a)）

$f_1(t)=\dfrac{A}{2}(\sin\omega t+|\sin\omega t|)$；

⑵　全波整流（图 16.1.5(b)）

$f_2(t)=A|\sin\omega t|$；

现取 $\omega=1$，试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数。

(a)

(b)

图 16.1.5

解　(1) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)dx=\dfrac{2A}{\pi}$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nxdx=-\dfrac{2A}{\pi(n^2-1)}$　（$n=2,4,6,\cdots$），

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nxdx=0$，（$n=1,3,5,\cdots$）；

$b_1=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin xdx=\dfrac{A}{2}$，

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin nxdx=0$，（$n=2,3,4,\cdots$）。

$$f_1(x)\sim\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin x-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)dx=\dfrac{4A}{\pi}$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=-\dfrac{4A}{\pi(n^2-1)}$　（$n=2,4,6,\ldots$），

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=0$　（$n=1,3,5,\ldots$）；

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\sin nxdx=0$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f_2(x)\sim\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

2. 将下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数：

⑴ $f(x)=\operatorname{sgn}x$；　　⑵ $f(x)=|\cos x|$；

(3) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi^2$;　　　　(4) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-\pi,0), \\ 0, & x\in[0,\pi); \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} ax, & x\in[-\pi,0), \\ bx, & x\in[0,\pi). \end{cases}$

解（1） $f(x)$ 为奇函数，所以 $a_n=0$，（$n=0,1,2,\dots$），

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}。$$

（2） $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{4}{\pi}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}$，（$n=2,4,6,\cdots$），

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0$，（$n=1,3,5,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx。$$

（3） $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{5}{3}\pi^2$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2(-1)^n}{n^2}$ （$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{5}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx。$$

（4） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{\pi}{2}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{\cos(n\pi)}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx。$$

（5） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi(b-a)}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{(a+b)\cos(n\pi)}{n}$$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{(a-b)\pi}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$。

3. 将下列函数展开成正弦级数：

(1) $f(x)=\pi+x$，$x\in[0,\pi]$；　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$，$x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}),\\ \pi, & x\in[\frac{\pi}{2},\pi];\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

解（1）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=2\cdot\frac{1-2(-1)^n}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx$$。

（2）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{\pi(4+n^2)}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{n^2+4}\sin nx$$。

（3）$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{-2\left[n\pi(-1)^n-2\sin\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx$$。

（4）$b_1=\frac{2}{2}\int_0^{2}f(x)\sin xdx=\frac{1}{\pi}$，

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^{2}f(x)\sin nxdx=\frac{2(n-\sin\frac{n\pi}{2})}{\pi(n^2-1)}$$，（$n=2,3,4,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}x$$。

4. 将下列函数展开成余弦级数：

(1) $f(x)=x(\pi-x)$，$x\in[0,\pi]$；　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，$x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{4}),\\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}];\end{cases}$ (4) $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}+\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$x\in[0,\pi]$.

解（1） $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{\pi^2}{3}$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}。$$

（2） $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}(e^{\pi}-1)$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2\left[e^{\pi}(-1)^n-1\right]}{\pi(1+n^2)}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n e^{\pi}-1\right]}{n^2+1}\cos nx。$$

（3） $a_0=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\dfrac{2+\pi}{\pi}$，

$$a_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2xdx=-\frac{1}{\pi}，$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx=\frac{2}{\pi(n^2-1)n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-n\right)，（n=2,3,4,\cdots）。$$

$$f(x)\sim(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2})-\frac{1}{\pi}\cos 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos 2nx。$$

（4） $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{4\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}，（n=1,2,3,\cdots）。$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx。$$

5. 求定义在任意一个长度为 2π 的区间 $[a,a+2\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数及其系数的计算公式。

解 设 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos mxdx=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\cos mxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\cos mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mxdx+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\cos mxdx)$$

$=a_m\pi$，（$m=0,1,2,\ldots$），

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin mxdx=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\sin mxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\sin mxdx+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mxdx)$$

$=b_m\pi$，（$m=1,2,\ldots$），

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)。$$

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$，$x\in[0,2\pi]$；

(2) $f(x)=x^2$，$x\in[0,2\pi]$；

(3) $f(x)=x$， $x\in[0,1]$；

(4) $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\in[-1,0),\\ 0, & x\in[0,1);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[-T,0),\\ 0, & x\in[0,T)\end{cases}$ (C 是常数).

解 (1) $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=0$，（$n=0,1,2,\cdots$），

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{1}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx。$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\dfrac{8}{3}\pi^2$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{4}{n^2}$，（$n=1,2,3,\cdots$），

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=-\dfrac{4\pi}{n}$，（$n=1,2,3,\cdots$）。

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx\right)。$$

（3） $a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 1$，

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx dx = 0$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$），

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx dx = -\dfrac{1}{n\pi}$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nx。$$

（4） $a_0 = \int_{-1}^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}(1 - e^{-3})$，

$a_n = \int_{-1}^1 f(x)\cos \pi nx dx = \dfrac{3}{9 + n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n e^{-3}\right]$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$），

$b_n = \int_{-1}^1 f(x)\sin \pi nx dx = \dfrac{n\pi}{9 + n^2\pi^2}\left[-1 + (-1)^n e^{-3}\right]$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{1}{6}(1 - e^{-3}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3\left(1 - (-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2 + 9}\cos n\pi x - \frac{n\pi\left(1 - (-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2 + 9}\sin n\pi x\right]。$$

（5） $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = C$，

$a_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{T}dx = 0$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$），

$b_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{T}dx = \dfrac{C}{n\pi}\left[-1 + (-1)^n\right]$，（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x。$$

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < T_0, \\ 5\sin\omega t, & T_0 \le t < T, \end{cases}$$

其中 ω 为圆频率，周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$。现设初始导通时间 $T_0 = \dfrac{T}{8}$（见图 16.1.6），求 $I(t)$ 在 $[0, T]$ 上的 Fourier 级数。

解 $a_0 = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \dfrac{5(\sqrt{2} - 2)}{2\pi}$，

图 16.1.6

$a_1 = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\dfrac{2\pi x}{T}dx = -\dfrac{5}{4\pi}$，

$a_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\dfrac{2\pi nx}{T}dx = \dfrac{5}{2\pi}\left[\dfrac{1}{n+1}\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} - \dfrac{1}{n-1}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{4} + \dfrac{2}{n^2 - 1}\right]$，

（$n=2,3,4,\cdots$），

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi x}{T}dx=\frac{5(7\pi+2)}{8\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx=\frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right],$$

（$n=2,3,4,\cdots$）。

$$f(x)\sim-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t。$$

8．设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，证明：

(1) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=f(x+\pi)$，则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

(2) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=-f(x+\pi)$，则 $a_{2n}=b_{2n}=0$．

证（1）$a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos[(2n-1)t-(2n-1)\pi]dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)xdx\quad(t=x+\pi)$$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$），

$b_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin[(2n-1)t-(2n-1)\pi]dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)xdx\quad(t=x+\pi)$$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$）。

(2) $a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-f(t)\cos(2nt-2n\pi)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx\quad(t=x+\pi)$$

$=0$，（$n=1,2,3,\ldots$），

$$b_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-f(t)\sin(2nt-2n\pi)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)dx \quad (t=x+\pi)$$
$=0$，（$n=1,2,3,\dots$）。

9. 设 $f(x)$ 在 $(0,\pi/2)$ 上可积或绝对可积，应分别对它进行怎么样的延拓，才能使它在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$； (2) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$.

解 （1）显然，$f(x)$ 为偶函数，而且

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)dx \quad （令 t=\pi-x）$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-t)\cos(2nt)dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(\pi-x)\right]\cos(2nx)dx=0,$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}。$$

（2）显然，$f(x)$ 为奇函数，而且

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx \quad （令 t=\pi-x）$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left[(2n-1)x\right]dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\sin\left[(2n-1)t\right]dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(\pi-x)\right]\sin\left[(2n-1)x\right]dx=0\text{，}$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0\text{，}$$

于是 $f(x)$ 可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ -f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0) \\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2}) \\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi) \end{cases}\text{。}$$

10. 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n，求下列函数的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$：

(1) $g(x)=f(-x)$；　　(2) $h(x)=f(x+C)$（C 是常数)；

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)dt$　（假定积分顺序可以交换)。

解（1） $\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos nxdx$ （令 $t=-x$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdx\text{，}$$

所以

$$\tilde{a}_n=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin nxdx$ （令 $t=-x$）

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdx\text{，}$$

所以

$$\tilde{b}_n=-b_n\quad(n=1,2,\cdots)\text{。}$$

（2）因为 $x+C\in[-\pi,\pi]$，所以 $x\in[-\pi-C,\pi-C]$。

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}h(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}f(x+C)\cos nxdx$$ （令 $t=x+C$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(t-C)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\cos nCdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\sin nCdx$$

$=a_n\cos nC+b_n\sin nC \quad (n=0,1,2,\cdots)$，

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}h(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C}f(x+C)\sin nxdx$$ （令 $t=x+C$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin n(t-C)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\cos nCdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\sin nCdx$$

$=b_n\cos nC-a_n\sin nC \quad (n=1,2,\cdots)$。

（3）$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\,dx\right]\cos nxdx$（交换次序）

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\cos nx\,dx\right]f(t)dt$。

当 $n=0$ 时，

$\tilde{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\,dx\right]f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_0f(t)dt=a_0^2$，

当 $n>0$ 时，

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)[\cos n(x-t)\cos nt-\sin n(x-t)\sin nt]dx\right]f(t)dt$$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt-b_n\sin nt)f(t)dt=a_n^2-b_n^2$， $(n=1,2,\cdots)$。

$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\,dt\right]\cos nxdx$ （交换次序）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\cos nx\,dx\right]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)[\sin n(x-t)\cos nt+\cos n(x-t)\sin nt]dx\right]f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_n\cos nt+a_n\sin nt)f(t)dt=2a_nb_n\qquad(n=1,2,\cdots)。$$