

## 答案与提示

### 第三章 一元函数积分学

#### §1 定积分的概念、性质和微积分基本定理

1. (1)  $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ ; (2)  $e - 1$ 。

2. (1) 1; (2)  $\frac{\pi}{4}$ 。

3. (1)  $\int_0^1 \sin x dx$ ; (2)  $\int_0^1 e^{2x} dx$ ; (3)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ ; (4)  $\int_0^1 \log_a(1+x) dx$ 。

4. (1)  $\int_0^1 x dx < \int_0^1 \sqrt{x} dx$ ;

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ ;

(3)  $\int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$ ;

(4)  $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x) dx$ 。

5. 由题设存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) > 0$ 。由  $f$  的连续性知, 存在  $\delta > 0$ , 使得在  $[c - \delta, c + \delta] \subset [a, b]$  上成立  $f(x) > \frac{1}{2}f(c)$ , 于是

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = f(c)\delta > 0。$$

6. 提示: 利用被积函数的单调性。

7. (1)  $2x\sqrt{1+x^8}$ ; (2)  $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 。

8. (1) 1; (2)  $\frac{1}{2e}$ 。

9.  $-2x[f(x) - f(0)]$ 。

10. 提示:  $F'(x) = \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t) dt}{\left[ \int_0^x f(t) dt \right]^2}$ 。

11. 提示:  $F'(x) = \frac{\int_0^x [f(x) - f(t)] dt}{(x-a)^2}$ 。

12. (1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (2) 0; (3)  $\frac{\pi}{6}$ ; (4)  $3e^3 - 2e^2$ 。

13. 提示: 运用积分中值定理, 再运用Rolle定理。

14. 提示: 令  $F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $F(0) = f(0) - \int_0^1 f(x)dx$ ,

则  $F(\alpha)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $F(1) = 0$ 。进一步,

$$F'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \left( \alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x)dx \right), \quad \alpha \in (0, 1)。$$

由积分中值定理知  $\int_0^\alpha f(x)dx = \alpha f(\xi)$  ( $\xi \in [0, \alpha]$ ), 再利用已知条件可知, 当

$\alpha \in (0, 1)$  时  $F'(\alpha) \leq 0$ , 即  $F(\alpha)$  在  $[0, 1]$  上单调减少。

15. 提示: 由 Taylor 公式

$$f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geq f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)。$$

再对不等式两边积分。

## §2 不定积分的计算

1. (1)  $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} + c$ ; (2)  $\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}} + 4x^{\frac{1}{4}} + c$ ; (3)  $x - 2\arctan x + c$ ;

(4)  $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + c$ ; (5)  $\frac{1}{3}x^3 + 2e^x + c$ ; (6)  $-\cot x - x + 3\arcsin x + c$ ;

(7)  $3\operatorname{ch}x + 4\operatorname{sh}x + c$ ; (8)  $\tan x - \cot x + c$ 。

2. (1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}x + c$ ; (2)  $-\frac{10}{3(x^3+1)} + c$ ; (3)  $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9} + c$ ;

(4)  $\ln|4+x^2+x^3| + c$ ; (5)  $\sqrt{1+2e^x} + c$ ; (6)  $\frac{1}{2}e^{x^2} + x^2 + c$ ;

(7)  $-e^{\frac{1}{x}} + c$ ; (8)  $\arctan e^x + c$ ; (9)  $-\frac{1}{25}\sqrt{4-25x^2} + c$ ;

(10)  $\ln|\ln \ln x| + c$ ; (11)  $\frac{\arcsin 2^{x-1}}{\ln 2} + c$ ; (12)  $\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$ ;

(13)  $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c$ ; (14)  $-x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + c$ ;

(15)  $\frac{3}{5}\ln|x+3| + \frac{2}{5}\ln|x-2| + c$ ; (16)  $-\sqrt{3+2x-x^2} + 2\arcsin \frac{x-1}{2} + c$ 。

3. (1)  $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$ ; (2)  $\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + c$ ;

$$(3) 2\sqrt{1-e^x} + \ln \frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}} + c; \quad (4) \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + c;$$

$$(5) \sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{x} + c; \quad (6) \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{x} + c;$$

$$(7) \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + c; \quad (8) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c;$$

$$(9) 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + c;$$

$$(10) x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln|x^{\frac{1}{6}}-1| + c;$$

$$4. (1) \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c; \quad (2) \frac{1}{2} \sec^2 x + \ln |\cos x| + c;$$

$$(3) -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c; \quad (4) -\cot \frac{x}{2} + c;$$

$$(5) \arctan(\sin^2 x) + c; \quad (6) \frac{1}{3} \ln(1 + \sin^3 x) + c;$$

$$(7) \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + c; \quad (8) \frac{1}{2} \ln(2\cos^2 x + 3\sin^2 x) + c.$$

$$5. (1) -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c; \quad (2) \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c;$$

$$(3) -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c; \quad (4) x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c;$$

$$(5) -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + c; \quad (6) \frac{1}{2}(1-x)e^x \cos x + \frac{1}{2}xe^x \sin x + c;$$

$$(7) -2\sqrt{1-x} \arcsin x + 4\sqrt{x+1} + c; \quad (8) -x \cot x + \ln |\sin x| + c;$$

$$(9) \frac{\ln \cos x}{\cos x} + \sec x + c; \quad (10) -\frac{1}{2}x \cos \ln x + \frac{1}{2}x \sin \ln x + c;$$

$$(11) -\frac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} + c; \quad (12) x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c;$$

$$(13) \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + c; \quad (14) \frac{e^{2x}}{4(1+2x)} + c;$$

$$6. (1) \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-2}{x+5} \right| + c;$$

$$(2) \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6}(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c;$$

$$(3) x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \arctan x + c;$$

$$(4) \frac{5(1-x)}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c;$$

$$(5) \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c;$$

$$(6) \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \arctan x + c;$$

$$(7) \frac{2x-5}{32(4x^2-4x+5)} + \frac{1}{64} \arctan\left(x - \frac{1}{2}\right) + c;$$

$$(8) \frac{1}{4(2+x^4)^2} - \frac{1}{4(2+x^4)} + c.$$

$$7. (1) -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cot x\right) + c; (2) \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln|\csc x - \cot x| + c;$$

$$(3) \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + c; (4) \ln|1 + \tan x| + \ln|\cos x| + c;$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3} - \tan \frac{x}{2}} \right| + c; (6) \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} \right| + c;$$

$$(7) \tan \frac{x}{2} - \ln(1 + \cos x) + c; (8) \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \left[ \frac{\sqrt{5}}{5} \left( 3 \tan \frac{x}{2} + 1 \right) \right] + c.$$

$$8. (1) \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c;$$

$$(2) -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + c;$$

$$(3) -\sqrt[4]{x(1-x)^3} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} + \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}} - 2}{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} + \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}} + 2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} - \sqrt[4]{\frac{x}{1-x}}}{\sqrt{2}} + c;$$

$$(4) \frac{1}{4} (2x+1) \sqrt{4x^2+4x+5} + \ln(2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+5}) + c;$$

$$(5) \frac{11}{8} \arcsin \left[ \frac{2\sqrt{5}}{5} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{x}{2} \sqrt{1+x-x^2} + c;$$

$$(6) \frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1}{8} (2x+1) \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{16} \ln \left( \frac{1}{2} + x + \sqrt{x+x^2} \right) + c。$$

$$9. (1) -\sqrt{2} \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| + c; (2) -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x + c;$$

$$(3) (\arctan \sqrt{x})^2 + c; (4) -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + c;$$

$$(5) -\frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} + c; (6) \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c;$$

$$(7) \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c; (8) \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + c。$$

$$10. \frac{(\cos x - \sin^2 x)^2}{2(1+x \sin x)^4} + c。$$

$$11. -x^2 - \ln |1-x| + c;$$

$$12. x - \ln(1+e^x) - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + c。$$

### §3 定积分的计算

$$1. (1) 1; (2) \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}; (3) \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right); (4) \frac{\pi^2}{4} - 2;$$

$$(5) -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}; (6) 20 - \frac{44}{e}; (7) \frac{3}{2}; (8) 4。$$

$$2. (1) 2 \ln 2 - 1; (2) -\frac{1}{2} \ln 3 - \ln(\sqrt{2}-1); (3) \frac{10-3\pi}{4}; (4) \frac{\pi-2 \ln 2}{4};$$

$$(5) \frac{\sqrt{3}}{8a^2}; (6) \frac{\sqrt{3}\pi}{9}; (7) \frac{1}{6}; (8) \frac{8}{105}。$$

$$3. (1) 4; (2) 2 - \frac{2}{e}; (3) \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}; (4) \frac{5\pi}{8};$$

$$(5) \frac{1}{2}; (6) 0 \quad (n \neq 2); -\frac{\pi}{4} \quad (n=2)。$$

4.  $\frac{\pi}{8} \ln 2$ 。

5. 提示：作变换  $x = -t$ 。

6. 提示：作变换  $x = \sqrt{t}$ 。

7. 作变换  $x = \pi - t$ ，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt,$$

移项便得结论。

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}, \quad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}。$$

8. 提示：等式两边的导数相等。

9.  $\frac{1}{2}(1-e^{-4}) + \ln \frac{1+e}{2}$ 。

10.  $f''(1) = 2, f'''(1) = 5$ 。

11.  $\frac{1}{e}$ 。

12.  $\frac{5}{4}$ 。

13.  $n^2 \pi$ 。

14.  $\frac{2}{\pi}$ 。

15. 提示：(1) 注意在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上成立  $0 \leq \tan x \leq 1$ ；

(2) 利用等式  $\tan^n x = \tan^{n-1} x(\sec^2 x - 1)$ 。

16. 提示：由 Taylor 公式得

$$f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

将  $x$  换成  $x^2$ ，再对不等式两边积分。

17.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.370762168$ 。

#### §4 定积分的应用

1.  $\frac{9}{2}^\circ$ 。

2.  $\frac{9}{4}^\circ$ 。

3.  $\frac{7}{6}^\circ$ 。

4.  $\frac{3\pi a^2}{8}$ 。

5.  $\frac{\pi a^2}{12}$ 。

6.  $\sqrt{2}\pi a^2$ 。

7.  $2a^2b\pi^2$ 。

8.  $3\pi p^3$ 。

9.  $\frac{256}{15}\pi$ 。

10.  $\frac{2}{3}R^3 \tan \alpha$ 。

11. 提示：考虑在  $x$  处，高为  $f(x)$ ，底边长为  $\Delta x$  的小矩形绕  $y$  轴旋转一周生成旋转体的体积（即两同轴圆柱体的体积之差）是

$$\Delta V = \pi(x + \Delta x)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = 2\pi x f(x) \Delta x + \pi f(x) (\Delta x)^2,$$

略去高阶无穷小项便得

$$dV = 2\pi x f(x) dx。$$

由微元法便知  $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$ 。

12. 提示：旋转体体积是一个圆锥体和一个球冠的体积之和：

$$V = \pi \int_0^{R \cos \alpha} (\tan \alpha x)^2 dx + \pi \int_{R \cos \alpha}^R (R^2 - x^2) dx。$$

13. (1)  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时取最小值  $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ ；(2)  $\frac{1 + \sqrt{2}}{30} \pi$ 。

14. (1)  $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ ；(2) 4；(3)  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$ ；(4)  $6a$ ；(5)  $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$ 。

15. (1)  $K = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ， $R = 2\sqrt{2}$ ；(2)  $K = \frac{\sqrt{2}}{4a}$ ， $R = 2\sqrt{2}a$ 。

16. (1) 抛物线方程应为  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )。  $K = \frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $R = \frac{1}{K}$ ;

(2)  $K = \frac{1}{a^2 b^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $R = \frac{1}{K}$ ;

(3)  $K = \frac{1}{3\sqrt[3]{axy}}$ ,  $R = \frac{1}{K}$ ;

(4)  $K = \frac{1}{at}$ ,  $R = \frac{1}{K}$ 。

17.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ 。

18. (1)  $\frac{2\pi\sqrt{p}}{3} \left[ (2h+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right]$ ; (2)  $\frac{12\pi a^2}{5}$ ; (3)  $\frac{32\pi a^2}{5}$ 。

19. 取细棒中点为原点。与细棒垂直方向:  $-\frac{2kmM}{h\sqrt{4h^2+l^2}}$ , 与细棒平行方向: 0。

20.  $\frac{km_1 m_2}{l_1 l_2} \ln \frac{(a+l_1)(a+l_2)}{a(l_1+l_2+a)}$ 。

21.  $\frac{2}{3} \rho g a^2 b$ , 其中  $\rho$  是水的密度。

22.  $\pi \rho g \left\{ r^2 H h + \frac{1}{3} H [(r-h)^3 - r^3] - \frac{1}{2} r^2 [(r-h)^2 - r^2] + \frac{1}{4} [(r-h)^4 - r^4] \right\}$ , 其中  $\rho$  是水的密度。

23. 取细棒中点为原点。(1) 与细棒垂直方向:  $F = \frac{2k\rho l}{r\sqrt{4r^2+l^2}}$ , 与细棒平行方向: 0;

(2)  $W = 2k\rho \ln \frac{l+\sqrt{4r^2+l^2}}{l+\sqrt{4R^2+l^2}} + 2k\rho \ln \frac{R}{r}$ 。

24.  $\frac{\sqrt{2H}}{15\mu\sqrt{g}} \left( \frac{3R^2+4Rr+8r^2}{r^2} \right)$ 。

## §5 反常积分

1. (1)  $\ln \frac{3}{2}$ ; (2)  $\frac{1}{2}$ ; (3)  $\frac{1}{\ln 2}$ ; (4) 2; (5)  $\frac{\pi+2\ln 2}{4}$ ;



(6)  $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ ; (7)  $\frac{1}{5}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{10}\ln 3$ ; (8) 0。

2. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 收敛。

3. (1) -1; (2)  $\frac{\pi^2}{8}$ ; (3)  $-\frac{4}{9}$ ; (4)  $\pi$ ; (5)  $\pi$ 。

4. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 发散; (5) 收敛;

(6) 当  $1 < p < 2$  时收敛, 当  $p \leq 1$  或  $p \geq 2$  时发散。

5. (1) 0; (2)  $-\ln 2$ 。

6. (1)  $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ ; (2)  $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ ; (3)  $\Gamma(p+1)$ 。

7.  $\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ 。

8. (1)  $\frac{3}{128}\sqrt{\pi}$ ; (2)  $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$ 。

9. 提示: 利用B函数与 $\Gamma$ 函数的关系。

10. 提示: 作变换  $x = \frac{a^2}{t}$ 。