

数学分析课程中的几个反例

1. 处处连续处处不可导的函数

在数学分析的发展历史上，数学家们一直猜测：连续函数在其定义区间中，至多除去可列个点外都是可导的。也就是说，连续函数的不可导点至多是可列集。虽然这一猜测是错误的，但数学家在很长一段时期一直没能找到反例，原因是在当时函数的表示手段有限，而仅仅从初等函数或从分段初等函数表示的角度出发去考虑，是找不到反例的。但是随着级数理论的发展，函数表示的手段扩展了，数学家可以通过函数项级数来表示更广泛的函数类。**Weierstrass** 是一位研究级数理论的大师，他于 1872 年利用函数项级数第一个构造出了一个处处连续而处处不可导的函数，为上述猜测做了一个否定的终结：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(b^n x), \quad 0 < a < 1 < b, \quad ab > 1.$$

下面叙述的反例在证明上要相对简易些，它是由**荷兰数学家 Van Der Waerden** 于 1930 年给出的。

设 $\varphi(x)$ 表示 x 与最邻近的整数之间的距离，例如当 $x = 1.26$ ，则 $\varphi(x) = 0.26$ ；当 $x = 3.67$ ，则 $\varphi(x) = 0.33$ 。显然 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的连续函数，且 $\varphi(x) \leq 1/2$ 。

注意 当 $x, y \in [k, k + \frac{1}{2}]$ 或 $[k + \frac{1}{2}, k + 1]$ 时，成立 $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ 。

Van Der Waerden 给出的例子是：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}.$$

由 $\left| \frac{\varphi(10^n x)}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ ，及 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ 的收敛性，根据 **Weierstrass** 判别法，

上述函数项级数关于 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

现考虑 $f(x)$ 在任意一点 x 的可导性。由于 $f(x)$ 的周期性，不妨设 $0 \leq x < 1$ ，并将 x 表示成无限小数

$$x = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots。$$

若 x 是有限小数时，则在后面添上无穷多个 0。然后我们取

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m}, & \text{当 } a_m = 0,1,2,3,5,6,7,8, \\ -10^{-m}, & \text{当 } a_m = 4,9, \end{cases}$$

例如设 $x = 0.309546 \cdots$ ，则我们取 $h_1 = 10^{-1}$ ， $h_2 = 10^{-2}$ ， $h_3 = -10^{-3}$ ， $h_4 = 10^{-4}$ ， $h_5 = -10^{-5}$ ， $h_6 = 10^{-6}$ ， \cdots 。显然

$$h_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)。$$

于是我们只要证明极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}$ 不存在。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x)}{10^n h_m} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x)}{10^n h_m} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x)}{10^n h_m}。 \end{aligned}$$

当 $n \geq m$ 时， $\varphi(10^n(x+h_m)) = \varphi(10^n x \pm 10^{n-m}) = \varphi(10^n x)$ ，所以

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x)}{10^n h_m}。$$

当 $n = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ ，在 $10^n x$ 的表示中 a_m 的位置是第 $m-n$ 位小数，

$$10^n x = a_1 a_2 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots a_m \cdots，$$

$$10^n(x+h_m) = a_1 a_2 \cdots a_n . a_{n+1} \cdots (a_m \pm 1) \cdots，$$

由 h_m 的取法，可知 $10^n(x+h_m)$ 与 $10^n x$ 同时属于 $[k, k + \frac{1}{2}]$ 或 $[k + \frac{1}{2}, k+1]$ ，

因此

$$\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x) = \pm 10^n h_m，$$

于是我们得到

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1，$$

等式右端必定是整数，且其奇偶性与 m 一致，由此可知极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}$$

不存在，也就是说， $f(x)$ 在任意一点 x 是不可导的。这样，一个处处连续，但处处不可导的函数反例通过了函数项级数这一工具而被构造出来了。

电子课件演示

Weierstrass 的反例构造出来后，在数学界引起极大的震动，因为对于这类函数，传统的数学方法已无能为力，这使得经典数学陷入又一次危机。但是反过来危机的产生又促使数学家们去思索新的方法对这类函数进行研究，从而促成了一门新的学科“分形几何”的产生。所谓“分形”，就是指几何上的一种“形”，它的局部与整体按某种方式具有相似性。“形”的这种性质又称为“自相似性”。

我们知道，经典几何学研究的对象是规则而光滑的几何图形，但是自然界存在着许多不规则不光滑的几何图形，它们都具有上面所述的“自相似性”。如云彩的边界；山峰的轮廓；奇形怪状的海岸线；蜿蜒曲折的河流；材料的无规则裂缝，等等。这些变化无穷的曲线，虽然处处连续，但可能处处不可导。因此“分形几何”自产生起，就得到了数学家们普遍的关注，很快就发展为一门有着广泛应用前景的新的学科。

通过这个例子，同学们可以认识到数学家如何通过从提出猜想，到证明或否定猜想的过程，使数学学科得到发展的，希望学生在以后的学习中重视对反例的探讨。

2. Peano 曲线

什么是曲线？曲线就是一个从实轴上的闭区间到平面（或空间）的连续映射。如果这个映射具有非零的连续导数，则称曲线是光滑的，大家已经知道光滑曲线是可求长的。否则的话，曲线有可能不可求长。从常识来讲，曲线所绘出的图形的面积（或体积）似乎应该为零。但事实上一条曲线所绘出的图形的面积（或体积）并不一定是零。不仅如此，意大利数学家 Peano（1858 年 8 月—1932 年 4 月）发现，存在将实轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域（如三角形和正方形）的连续映射。也就是说，这条曲线通过该二维区域的每个点，这种曲线被称为 **Peano 曲线**。

在学习了函数序列一致收敛概念以后，我们就能在数学分析课程中讲解这一数学上的经典结论。下面我们给出一个将 $[0,1]$ 映满平面上边长为 $1/2$ 的正三角形的连续映射的构造方法。

设 Δ 为平面上边长为 $1/2$ 的闭正三角形。作连续映射 $f_1: [0,1] \rightarrow \Delta$ ，使得它的像是三角形的一个顶点到重心再到另一个顶点的折线，如图 1 所示。将 Δ 分为四个全等三角形，再作 $f_2: [0,1] \rightarrow \Delta$ ，使得 f_2 在每个区间 $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$ 上的像分别完全落在一个小三角形 Δ_i ($i=0,1,2,3$) 上，且 f_2 的像在小三角形 Δ_i 的部分恰如 f_1 的像，如图 2 所示。继续将每个小三角形 Δ_i 分为四个更小的全等三角形，作连续映射 $f_3: [0,1] \rightarrow \Delta$ ，使得在每个区间 $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$ ($i=0,1,2,3$) 上的像分别完全落在一个小三角形 Δ_i 上， f_3 在这个区间上的构造完全类似于 f_2 在 $[0,1]$ 上的构造，而且 f_3 的像在

更小的三角形的部分恰如 f_1 的像，如图 3 所示。如此继续下去，将正三角形 Δ 等分为 4^{n-1} 个小全等三角形，用归纳法可作出连续映射 $f_n : [0,1] \rightarrow \Delta$ ，使得从 f_{n-1} 到 f_n 的构造完全类似于从 f_2 到 f_3 的构造，且 f_n 的像在每个小三角形的部分恰如 f_1 的像。这样就可以构造一个连续映射序列 $\{f_n\}$ 。

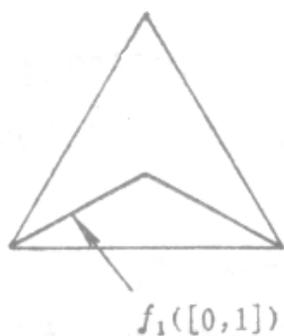


图 1

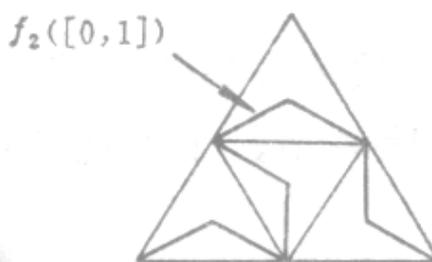


图 2

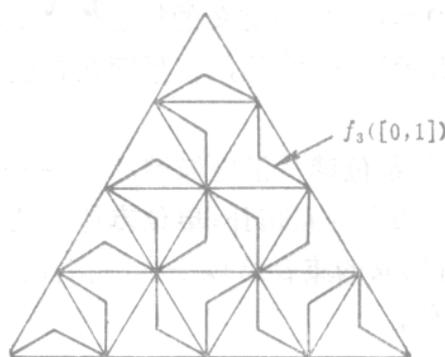


图 3

设 $m \leq n$ ，由序列 $\{f_n\}$ 的构造可知，对于每个 $t \in [0,1]$ ，若 $f_m(t)$ 落在某个 Δ_m^k 中，则 $f_n(t)$ 必然也落在这个 Δ_m^k 中，也就是说可以找到边长为 $1/2^m$ 的小三角形同时含有 $f_m(t)$ 和 $f_n(t)$ ，因此对一切 $t \in [0,1]$ ，成立

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq 1/2^m,$$

其中 $m \leq n$ 。这说明函数序列 $\{f_n\}$ 满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理，于是 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于一个连续映射 $f: [0,1] \rightarrow \Delta$ ，且 f 满足

$$|f_m(t) - f(t)| \leq 1/2^m, \quad t \in [0,1]。$$

现在证明 f 的像为整个 Δ 。

先证明 Δ 上每一点都是 f 的像集的聚点。从 $\{f_n\}$ 的构造可知： f_n 关于 $[0,1]$ 区间的像到 Δ 上任一点的距离不超过 $1/2^n$ 。设 a 是 Δ 上任一点，则对任意的 n ，存在 $t_n \in [0,1]$ ，使得

$$|a - f_n(t_n)| \leq 1/2^n。$$

因此

$$|a - f(t_n)| \leq |a - f_n(t_n)| + |f_n(t_n) - f(t_n)| \leq 1/2^n + 1/2^n = 1/2^{n-1}，$$

由 n 的任意性，可知 a 是 f 的像集的聚点。

显然 $f([0,1]) \subset \Delta$ 。而 f 为连续映射，所以 $f([0,1])$ 为紧集，因此是闭集，所以 $f([0,1])$ 包含它的所有聚点，因此 $f([0,1]) = \Delta$ ，即 f 的像为整个 Δ 。

注 可以同样构造一条空间曲线，它通过某个空间区域的每一个点。

3. Schwarz 的反例

我们将光滑曲线的内接折线长度的极限定义为曲线的弧长，但这一定义不能推广到光滑曲面的面积定义上去。Schwarz 曾举过一个例子：即使对一段圆柱面，都无法用“内接多面形之面积的极限”来定义它的面积。

设一圆柱面的高是 h ，半径是 r ，那么它的面积显然是 $2\pi rh$ 。在

这个圆柱面上取三点 A , B 和 C , 使得 A, B 在同一高度上, 而 C 和 A, B 不在同一高度上, 且 C 在 A, B 的连线上的投影 C' 恰是线段 AB 的中点 (图 4)。

作三角形 ABC , 则它是圆柱面的一个内接多边形。再由图 2 那样, 作出圆柱面的内接多面形, 它是由许多三角形连结起来的, 每一个三角形都如同三角形 ABC 。问题是当这些三角形的直径都趋于 0 时, 它们的面积之和的极限是否为圆柱面的面积 $2\pi rh$ 呢?

把圆柱面的底圆 m 等分, 高 n 等分, 这时图 5 中的三角形共有 $2mn$ 个, 并且都是全等的。易计算每个三角形的底边长是 $2r \sin \frac{\pi}{m}$, 高是

$\sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}$, 那么其面积为

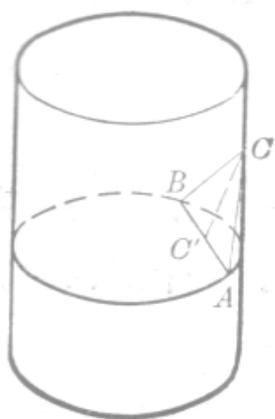


图 4

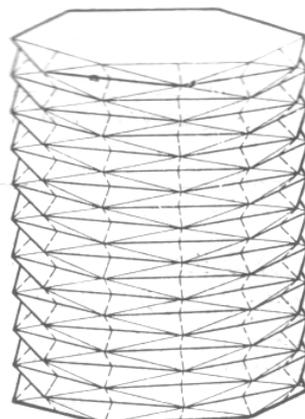


图 5

$$\frac{1}{2} \cdot 2r \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2} = r \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{n^2}}。$$

于是所有小三角形组成的内接多面形的面积 S_m 为

$$S_{mn} = 2\pi nr \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{n^2}}$$

$$= 2\pi rh \left(\frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \right) \sqrt{\frac{\pi^4 r^2}{4h^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4 \frac{n^2}{m^4} + 1}。$$

由于当 $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ 时, 上式中两圆括号内的值都趋于 1, 因此 S_{mn} 的极限与 $\frac{n}{m^2}$ 的极限有关。当 $\frac{n}{m^2}$ 的极限不存在时, S_{mn} 的极限也不存在; 当 $\frac{n}{m^2}$ 有极限 l 时, S_{mn} 的极限为

$$S(l) = 2\pi r \sqrt{\frac{\pi^4 r^2 l^2}{4} + h^2}。$$

这一极限与 l 有关, 即与 m, n 同时趋于无穷大的方式有关。只有当 $l=0$ 时它才是圆柱面的面积 $2\pi rh$ 。

由于 m, n 可以各自独立地趋于无穷大, 所以 S_{mn} 确实没有一个与 m, n 增加方式无关的极限。也就是说, 无法用“内接多面形之面积的极限”来定义曲面的面积。

再来看一下 $l=0$ 的几何意义: 设 θ 是三角形所在平面与圆柱面母线的夹角(图 6), 那么当 $l=0$, 即 $\frac{n}{m^2} \rightarrow 0$ 时, 显然有

$$\tan \theta = \frac{r - r \cos \frac{\pi}{m}}{\frac{h}{n}} = \frac{2r \sin^2 \frac{\pi}{2m}}{\frac{h}{n}} = \frac{\pi^2 r}{2h} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^2 \frac{n}{m^2} \rightarrow 0,$$

这说明只有当三角形所在的平面趋于切平面位置时, S_{mn} 才可能以圆柱面的面积为极限。



图 6