教案

实数系的连续性——实数系的基本定理

复 旦 大 学　陈纪修　於崇华　金路

1．教学内容

利用实数的无限小数表示，证明非空有界的实数集合必有上确界与下确界，即最小上界与最大下界。

2．指导思想

（1）　Newton , Leibniz 建立微积分以来，它在解决实际问题上的正确性与在逻辑上的不严格性的矛盾困惑了一代又一代的数学家，不少人对微积分理论产生过怀疑，直到 Cauchy , Weierstrass 建立了极限论的严格基础，人类科学史上最辉煌的成就之一——微积分理论的大厦才得以牢固建立。作为极限论的出发点，实数系的基本定理——实数系的连续性，在数学分析课程中占有重要的地位。

（2）　实数系的基本定理有多种表达方式：Dedkind 切割定理，确界存在定理，单调有界数列收敛定理，闭区间套定理，Bolzano-Weierstrass 定理，Cauchy 收敛原理和 Cantor 定理。这些定理是等价的，其中每一个都可以作为极限论的出发点，建立起整个极限理论。

（3）　传统的教材常采用 Dedkind 切割定理作为实数系连续性定理，并由此出发导出极限论的全部理论。但由于 Dedkind 切割定理过分抽象，对大学一年级学生来说难以接受，而将实数连续性作为一个公理加以承认又使人感到极限理论不够完备。我们则采用对学生来说非常熟悉的实数的无限小数表示方法，直观而简明地证明了确界存在定理，既使得学生容易掌握，又使得本书的极限理论得以完备化。

（4）　通过本节的教学， 要求使学生了解人类对数的认识的发展历史；对实数系的连续性不仅能从几何上理解，还能从分析上掌握如何加以证明；并认识正是由于实数系的连续性，才使它成为整个数学分析课程的“ 活动舞台 ”。

3．教学安排

（1）　讲述人类对数的认识的发展历史：

$$\text{自然数} \Rightarrow \text{整数} \Rightarrow \text{有理数} \Rightarrow \text{实数。}$$

讲解促使这一发展历史的原因和例子。指出整数系具有离散性, 有理数系具有稠密性, 对于实数系，让学生先从几何上理解它的连续性：实数布满整个数轴而无“ 空隙 ”。

（2） 先给出数集的最大数与最小数的定义： 设 S 是一个数集，如果 $\exists\, \xi \in S$，使得 $\forall\, x \in S$，有 $x \le \xi$，则称 ξ 是数集 S 的最大数，记为 $\xi = \max S$ ；如果 $\exists\, \eta \in S$，使得 $\forall\, x \in S$，有 $x \ge \eta$，则称 η 是数集 S 的最小数，记为 $\eta = \min S$。

当数集 S 是非空有限集，即 S 只含有有限个数时，$\max S$ 与 $\min S$ 显然存在，

且$\max S$是这有限个数中的最大者，$\min S$是这有限个数中的最小者。但是当S是无限集时，情况就不同了。例如 集合$A=\{x|x\geq 0\}$没有最大数，但有最小数，

且$\min A\ =0$；集合$B=\{x|0\leq x<1\}$没有最大数，但有最小数。

注意在证明数集S没有最大数时，我们采用的思路是：$\forall x\in S,\exists x'\in S:x'>x$。

(3) 给出数集的上确界与下确界的定义：设数集S有上界，记U为S的上界全体所组成的集合，则显然U不可能有最大数，但是U是否一定有最小数？如果U有最小数β，就称β为数集S的上确界，即最小上界,记为

$$\beta\ =\ \sup S。$$

由定义，可知上确界β满足下述两性质：

(a) β是数集S的上界：$\forall\ x\in S$，有$x\leq\beta$；

(b) 任何小于β的数不是数集S的上界：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ x\in S$,使得$x>\beta-\varepsilon$。

(4) 叙述实数的无限小数表示：任何一个实数x可表示成

$$x=\ [x]\ +(x),$$

其中［x］表示x的整数部分，(x)表示x的非负小数部分。例如对$x=3.4$,有$[x]=3,(x)=0.4$；对$x=-2.7$,有$[x]=-3$，$(x)=0.3$。我们将(x)表示成无限小数的形式：

$$(x)=\ 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$中的每一个都是数字 0，1，2，…，9 中的一个。若(x)是有限小数，则在后面接上无限个 0，这称为实数的无限小数表示。注意无限小数$0.a_1a_2\cdots a_p000\cdots(a_p\neq 0)$与无限小数$0.a_1a_2\cdots(a_p-1)999\cdots$是相等的，为了保持表示的唯一性，我们约定在($x$)的无限小数表示中不出现后者。这样，任何一个实数集合S就可以由一个确定的无限小数的集合来表示：

$$\{a_0+0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\ |\ a_0\ =\ [x]\ ,0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\ =(x),x\in S\ \}。$$

(5) 我们通过下述方法来找出数集的上确界：设数集S有上界，则可令S中元素的整数部分的最大者为α_0(α_0一定存在，否则的话，S就不可能有上界)，并记

$$S_0=\{x|x\in S\text{ 并且}[x]=\alpha_0\}。$$

显然S_0不是空集，并且$\forall\ x\in S$，只要$x\notin S_0$，就有$x<\alpha_0$。

再考察数集S_0中元素的无限小数表示中第一位小数的数字，令它们中最大的为α_1，并记

$$S_1 = \{x | x \in S_0 \text{ 并且}x\text{的第一位小数为}\alpha_1\}。$$

显然S_1也不是空集，并且$\forall\ x \in S$，只要$x \notin S_1$，就有$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$。

一般地，考察数集S_{n-1}中元素的无限小数表示中第n位小数的数字，令它们中最大的为α_n，并记

$$S_n = \{x | x \in S_{n-1} \text{ 并且}x\text{的第}n\text{位小数为}\alpha_n\}。$$

显然S_n也不是空集，并且$\forall\ x \in S$，只要$x \notin S_n$，就有$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$。

不断地做下去，我们得到一列非空数集$S \supset S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$，和一列数$\alpha_0$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n,\cdots$，满足

$$\alpha_0 \in Z\ ;$$

$$\alpha_k \in \{0,1,2,\cdots,9\}, \forall k \in N。$$

令

$$\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$

这就是我们要找的数集S的上确界。

（6）我们分两步证明β就是数集S的上确界。

（a） $\forall\ x \in S$，或者存在整数$n_0 \ge 0$，使得 $x \notin S_{n_0}$；或者对任何整数 $n \ge 0$，有$x \in S_n$。若 $x \notin S_{n_0}$,便有

$$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0} \le \beta。$$

若$x \in S_n$（$\forall\ n \in N \cup \{0\}$），由$S_n$的定义并逐位比较$x$与$\beta$的整数部分与每一个小数位上的数字，即知$x = \beta$。所以$\forall\ x \in S$，有$x \le \beta$，即$\beta$是数集$S$的上界。

(b) $\forall \varepsilon > 0$，只要将自然数 n_0取得充分大，便有

$$\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon。$$

取 $x_0 \in S_{n_0}$，则β与 x_0 的整数部分及前 n_0 位小数是相同的，所以

$$\beta - x_0 \le \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon，$$

即

$$x_0 > \beta - \varepsilon$$

即任何小于 β 的数 $\beta-\varepsilon$ 不是数集 S 的上界。

（7） 最后我们说明有理数集不具备“ 确界存在定理 ”，即有理数集是不连续的。

设 $T=\{x|x\in Q 并且 x>0，x^2<2\}$，证明 T 在 Q 中没有上确界。

证 用反证法。

假设 T 在 Q 内有上确界，记 $\sup T = \frac{n}{m}$（m，$n\in N$ 且 m，n 互质），则显然有

$$1<(\frac{n}{m})^2<3。$$

由于有理数的平方不可能等于 2，于是只有下述两种可能：

(a) $1<(\frac{n}{m})^2<2$：

记 $2-\frac{n^2}{m^2}=t$，则 $0<t<1$。令 $r=\frac{n}{6m}t$，则 $\frac{n}{m}+r>0$，$\frac{n}{m}+r\in Q$，并且

$$(\frac{n}{m}+r)^2-2=r^2+\frac{2n}{m}r-t<0。$$

这说明 $\frac{n}{m}+r\in T$，与 $\frac{n}{m}$ 是 T 的上确界矛盾。

(b) $2<(\frac{n}{m})^2<3$：

记 $\frac{n^2}{m^2}-2=t$，则 $0<t<1$。令 $r=\frac{n}{6m}t$，显然也有 $\frac{n}{m}-r>0$，$\frac{n}{m}-r\in Q$ 并且

$$(\frac{n}{m}-r)^2-2=r^2-\frac{2n}{m}r+t>0。$$

这说明 $\frac{n}{m}-r$ 也是 T 的上界，与 $\frac{n}{m}$ 是 T 的上确界矛盾。

由此得到结论：T 在 Q 中没有上确界。

4． 注意点：

（1） 由于学生初学微积分，对极限论的抽象概念不易接受，应该在讲课中突出几何直观。如 $\sqrt{2}$ 位于有理数集合的“空隙”中，应通过单位正方形的对角线在数轴上标出它的位置；在确界定理的叙述中，应指出若实数

系在数轴上有“空隙”，则位于空隙左边的实数集合没有上确界，位于空隙右边的实数集合没有下确界。

(2) 本节课程中要遇到不少与一些抽象概念有关的命题，在给出它们的分析证明时要教会学生正确的逻辑思维方法。如证明“集合S没有最大数”的逻辑思路是证明：$\forall x \in S, \exists x' \in S : x' > x$；证明“$\beta$是集合$S$的上确界”的逻辑思路是证明：$\forall x \in S : x \le \beta$（即$\beta$是$S$的上界），且$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x > \beta - \varepsilon$（即任意小于$\beta$的数不是上界）；证明“有理数集合$T = \{x : x \in Q, x^2 < 2\}$在$Q$中没有上确界”的逻辑思路是：假设$\sup T = x_0 \in Q$，则可以找到有理数$r > 0$，或者$x_0 + r \in T$（即$x_0$不是$T$的上界），或者$\forall x \in T, x \le x_0 - r$（即$x_0$不是最小上界），从而推出矛盾。

(3) 通过讲课，要让学生了解实数系的连续性有多种等价的表达形式，这些等价的定理贯穿于极限论的整个理论，构成了极限论最基本、最丰富的内容。