教案

函数项级数的一致收敛性

复旦大学数学系　　陈纪修　金路

1．教学内容

通过讨论关于函数项级数（函数序列）的无限求和运算（极限运算）是否能与极限运算，求导运算或积分运算交换次序的问题，提出**函数项级数**（函数序列）的一致收敛概念与一致收敛的两个充分必要条件。

2．指导思想

（1）数学分析与初等函数的根本区别在于引入了极限运算（微分与积分的实质也是极限运算），极限运算应用到求和运算上就是级数的概念。由于有限求和运算可以与极限运算，求导运算或积分运算交换次序，所以讨论级数与极限运算，求导运算或积分运算的交换次序问题就成为级数理论的一个基本问题。

（2）函数项级数的一致收敛性是数学分析课程教学中的一个难点，也是学生最难掌握的内容之一。以往的教材往往直接引进函数项级数的一致收敛概念，然后再讲解一致收敛的函数项级数可以与极限运算，求导运算或积分运算交换次序，学生往往只能死记硬背概念，不能真正理解它的实质意义，过后很快容易忘记。我们则在教学中反其道而行之，先讨论一系列具体的函数项级数例子，指出在点态收敛的情况下，函数项级数不一定可以与极限运算，求导运算或积分运算交换次序，从而理解为了保证运算的交换，有必要引进更强的收敛概念，然后再讲解函数项级数的一致收敛概念。

（3）在数学分析课程中，一致收敛概念不仅出现于函数项级数部分，还出现于含参变量积分部分（它保证了积分运算与其他运算的可交换性），可以说，一致收敛性是数学分析，乃至整个分析学中最重要的概念之一，是学好如泛函分析，偏微分方程等后继课程的必备基础。因此在函数项级数部分第一次出现一致收敛概念时，必须将问题的背景，引人一致收敛概念的意义讲清楚，使学生从本质上理解它，做到终身不忘。

3．教学安排

（1）**函数项级数与函数序列收敛性的等价性：**

给定函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$（收敛域为集合$\mathbf{D}$），设它的部分和函数序列为$S_n(x)$：

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)，\quad x \in \mathbf{E}，$$

则函数序列$\{S_n(x)\}$的收敛域也是集合$\mathbf{D}$，且极限函数就是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的和函数$S(x)$：

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)，\quad x \in \mathbf{D}\ 。$$

反过来，给定一个函数序列 $\{S_n(x)\}$，只要令 $u_1(x) = S_1(x)$，　$u_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x)$　$(n = 1，2，...)$，就可得到函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，它的部分和函数序列就

是给定的$\{S_n(x)\}$，而它的收敛性与 $\{S_n(x)\}$的收敛性是相同的。

由于上述函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$与函数序列$\{S_n(x)\}$的收敛性在本质上是完全相同的，在研究函数项级数的性质时，可以先讨论函数序列的性质，而所得到的结论对相应的函数项级数也是自然成立的。

（2） 函数项级数(或函数序列)的基本问题：

如果函数$u_n(x)$(或$S_n(x)$)具有某种分析性质(例如连续性，可导性或Riemann可积性)，那末其和函数(或极限函数)是否也保持同样的分析性质?具体地说，对于有限个连续，可导或可积函数之和，和函数仍然连续，可导或可积，并且和函数的极限，导数或积分，可以通过每个函数求极限，导数或积分后再求和来得到。但是若将这有限个函数之和换成函数项级数，是否仍然可以如上面所述的那样对和函数进行求极限，求导数或求积分的运算?

(a)设$u_n(x)$(或$S_n(x)$)在**D**连续，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = S(x)$ (或$\lim_{n\to\infty}S_n(x) = S(x)$)，我们希望和函数(或极限函数)$S(x)$也在**D**连续，即对于任意$x_0\in\mathbf{D}$，成立$\lim_{x\to x_0}S(x) = S(x_0)$。这一性质对于函数项级数而言，就是极限运算与无限求和运算能够交换次序：

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x);$$

对于部分和函数序列而言，就是两种极限运算能交换序列：

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x).$$

下面例题说明上述两等式在点态收敛的情况下不一定成立。

例 1 设$S_n(x) = x^n$，则$\{S_n(x)\}$在区间$(-1，1]$收敛，极限函数为

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}S_n(x) = \begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

虽然对一切n，$S_n(x)$在$(-1，1]$连续(也是可导的)，但极限函数$S(x)$在$x = 1$不连续 (当然更谈不上$x = 1$可导)。

（b）设$u_n(x)$(或$S_n(x)$在**D**可导，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = S(x)$(或$\lim_{n\to\infty}S_n(x) = S(x)$)，我们希望和函数(或极限函数)$S(x)$也在**D**可导，且导函数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)$可以通过先对$u_n(x)$(或$S_n(x)$)求导，再求和(或求极限)得到。这一性质对于函数项级数而言，就是求导运算与无限求和运算能够交换次序：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x);$$

对于部分和函数序列而言，就是求导运算与极限运算交换次序

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x).$$

例 1 说明在点态收敛情况下，和函数(或极限函数)可能不可导，下面例题将说明，即使和函数(或极限函数)可导，上述两等式也不一定成立。

例 2　设$S_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则$\{S_n(x)\}$在$(-\infty，+\infty)$收敛，极限函数为$S(x) = 0$。虽然极限函数$S(x)$处处可导，且导函数$S'(x) = 0$，但导函数序列$\{S'(x)\}$，$S'(x) = \sqrt{n}\cos nx$，并不收敛于$S'(x)$ (例如当$x = 0$，$S'n(0) = \sqrt{n}\to 0$)。

（c）设$u_n(x)$(或$S_n(x)$)在闭区间 $[a，b]\subset \mathbf{D}$ 上Riemann 可积，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x) = S(x)$(或$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x) = S(x)$)，我们希望和函数(或极限函数)$S(x)$也在$[a，b]$上Riemann 可积，且积分值$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x$可以通过先对$u_n(x)$(或$S_n(x)$)求积分，再求和(再求极限)得到。这一性质对函数项级数而言，就是求积分运算与无限求和运算可以交换次序：

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

对于部分和函数序列而言，就是求积分运算与极限运算能够交换次序：

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x$$

下面例题将说明在点态收敛情况下，和函数(或极限函数)可能 Riemann 不可积，且即使 Riemann 可积，上述两等式也不一定成立。

例 3　设

$$S_n(x) = \begin{cases}1, & 当x\cdot n!为整数,\\ 0, & 当x为其他值.\end{cases}$$

当x是无理数时，对一切n，$S_n(x) = 0$，因此$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty}S_n(x) = 0$；当$x$是有理数$\dfrac{q}{p}$，$p\in\mathbf{N}$，$q\in\mathbf{Z}$时，对于$n\geqslant p$，$S_n(x) = 1$，因此$S(x) = \lim\limits_{n\to\infty}S_n(x) = 1$。于是$\{S_n(x)\}$的极限函数$S(x)$就是我们所熟知的Dirichlet函数。显然，$S_n(x)$在任何有限区间上都是Riemann 可积的，但极限函数$S(x)$却Riemann 不可积。

例 4　设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在区间$[0，1]$上收敛于极限函数$S(x) = 0$。显然对任意n，$S_n(x)$与$S(x)$都在$[0，1]$上Riemann 可积，但是

$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,\mathrm{d}\,x = -\frac{n}{2}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} \not\longrightarrow \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}\,x \quad (n\to\infty)。$$

上述例子说明了“点态收敛”不可能对所提出的函数项级数的基本问题给以肯定的回答，为此我们需要引进一种比“点态收敛”要求更强的收敛概念。

（3） **函数项级数(或函数序列)的一致收敛性**

所谓“函数序列$\{S_n(x)\}$在集合$\mathbf{D}$上(点态)收敛于$S(x)$”是指：对于任意$x_0\in\mathbf{D}$，数列$\{S_n(x)\}$收敛于$S(x_0)$，用“ε－N”语言来表示的话，就是：对任意给定的ε＞0，可以找到自然数$N=N(x_0,\varepsilon)$，当$n>N$时，成立：

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon,$$

其中$N(x_0,\varepsilon)$不仅与ε有关，而且与$x_0\in\mathbf{D}$有关。一般来说，$N(x_0,\varepsilon)$随着x_0的变化而变化，这反映了$S_n(x)$在集合$\mathbf{D}$ 的不同点上收敛于$S(x)$的速度不同。现在的问题是：能否找到与x_0无关，而仅与$\mathbf{D}$有关的$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in\mathbf{D}$成立?如果这样的$N(\varepsilon)$能够找到，则反映了$\{S_n(x)\}$不仅在$\mathbf{D}$上点态收敛于$S(x)$，而且收敛速度在$\mathbf{D}$上具有某种整体一致性。这种收敛，我们称之为一致收敛。

定义 设$\{S_n(x)\}$，$x\in\mathbf{D}$，是一函数序列，若对任意给定的ε＞0，存在仅与$\mathbf{D}$有关的自然数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in\mathbf{D}$成立，则称$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$，记为$S_n(x)\overset{D}{\Rightarrow}S(x)$。

符号表述：$S_n(x)\overset{D}{\Rightarrow}S(x)\iff\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \forall x\in\mathbf{D}$：

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

定义 若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$x\in\mathbf{D}$，的部分和函数序列$\{S_n(x)\}$，$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，在$\mathbf{D}$一致收敛于$S(x)$，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$。

符号表述：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)\iff\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \forall x\in\mathbf{D}$：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|=|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon。$$

一致收敛性的几何描述：对任意给定的ε＞0，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，函数$y=S_n(x)$，$x\in\mathbf{D}$，的图象都落在带状区域

$$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{D},\ S(x)-\varepsilon<y<S(x)+\varepsilon\}$$

之中（图象演示）。

例 5 设$S_n=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，则$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$收敛于极限函数$S(x)=0$。

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|\leqslant \frac{1}{2n}<\varepsilon$$

对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，因此$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$S(x)=0$。

从几何上看，对任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取$N=[\frac{1}{2\varepsilon}]$，当$n>N$时，函数$y=S_n(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，的图象都落在带状区域$\{(x,y)\,|\,|y|<\varepsilon\}$中，这正是一致收敛的几何描述。

例 6　设$S_n(x)=x^n$(见例 10.1.2)，我们考察$\{S_n(x)\}$在区间$[0,1)$上的一致收敛性。对任意给定的 $0<\varepsilon<1$，要使

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必需

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$$

因此$N=N(x,\varepsilon)$至少须取$[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}]$。由于当$x\to1-$时，$\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\to+\infty$，因此不可能找到对一切$x\in[0,1]$都适用的$N=N(\varepsilon)$，换言之，$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上不是一致收敛的（图像演示）。

从几何上看，对每个n，函数 $y=x^n$的取值范围(即值域)都是$[0,1)$，因此它们的图象不可能落在带状区域$\{(x,y)\,|\,x\in[0,1],0<y<\varepsilon=$中。

注　如果我们将上例中考察的区间$[0,1)$缩小为$[0,\rho]$，其中 $0<\rho<1$ 是任意的，则由

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\rho^n,$$

我们只要取 $N=N(\varepsilon)=[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\rho}]$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\rho^n<\varepsilon$$

对一切$x\in[0,\rho]$成立。换言之，$\{S_n(x)\}$在$[0,\rho]$($\rho<1=$上是一致收敛的。

从图示可以看出，随着 n 的增大，函数$y=x_n$在区间$[0,\rho]$上的图象越来越接近 x 轴，从而全部落在带状区域$\{(x,y)\,|\,0\geqslant x\geqslant\rho,\ 0\leqslant y\leqslant\varepsilon\}$中。

（5）关于一致收敛的两个充分必要条件

定理 1　设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合$\mathbf{D}$上点态收敛于$S(x)$，定义

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in\mathbf{D}}|S_n(x)-S(x)|,$$

则$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n,S)=0。$$

证　设$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$N=$

$N(\varepsilon)$，

当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x\in\mathbf{D}$ 成立，于是对 $n>N$，

$$\mathrm{d}(S_n, S)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这就说明

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(S_n, S)=0。$$

反过来，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(S_n, S)=0$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n>N$时，

$$\mathrm{d}(S_n, S)<\varepsilon,$$

此式表明

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in\mathbf{D}$成立，所以$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$。

证毕

对于例 5 中的$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，$x\in(-\infty, +\infty)$，由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

等号成立当且仅当 $x=\pm\dfrac{1}{n}$，可知

$$\mathrm{d}(S_n, S)=\frac{1}{2n}\to 0\quad(n\to\infty)。$$

对于例 6 中的$S_n(x)=x^n$，$x\in[0, 1)$，由于

$$\mathrm{d}(S_n, S)=\sup_{0\le x\le 1}x^n=1\quad\not\to\quad 0\quad(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在［0，1］上不是一致收敛的。

例 7　设$S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，则$\{S_n(x)\}$在$(0, +\infty)$上收敛于$S(x)=0$，由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

等号成立当且权当 $x=\dfrac{1}{n}$，可知

$$\mathrm{d}(S_n, S)=\frac{1}{2}\not\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此$\{S_n(x)\}$在$(0, +\infty)$上不是一致收敛的（图像演示）。

从几何上看(图 4)，对每个n，函数$y = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在$x = \dfrac{1}{n}$取到最大值，因此它们的图象不可能落在带状区域$\{(x, y) \mid 0 < x < +\infty, \ |y| < \varepsilon < \dfrac{1}{2}\}$中。事实上，$\{S_n(x)\}$在任意包含$x = 0$或以$x = 0$为端点的区间上都不是一致收敛的。

注 若考虑上例中$\{S_n(x)\}$在区间$[\rho, A]$ $(0 < \rho < A < +\infty)$上的一致收敛性，则由$|S_n(x) - S(x)| = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$及

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

可以知道当$n > \dfrac{1}{\rho}$时，

$$d(S_n, S) = \frac{n\rho}{1+n^2\rho^2} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[\rho, A]$上是一致收敛于$S(x) = 0$，也就是说，$\{S_n(x)\}$在包含于$(0, +\infty)$内的任意闭区间上是一致收敛的，我们称$\{S_n(x)\}$在$(0, +\infty)$**内闭一致收敛**。

回忆例 6，对$S_n(x) = x^n$，$\{S_n(x)\}$在$[0, 1)$上不一致收敛，但在任意的$[0, \rho] \subset [0, 1]$上一致收敛，因此称$\{S_n(x)\}(S_n(x) = x^n)$在$[0, 1)$内闭一致收敛。显然，在区间**D**上一致收敛的函数序列一定在**D**内闭一致收敛，但反过来却不一定成立。

例 8 设$S_n(x) = (1 - x)x^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0, 1]$上收敛于$S(x) = 0$。由

$$|S_n(x) - S(x)| = (1 - x)x^n,$$

及

$$[(1 - x)x_n]' = x^{n-1}[n - (n + 1)x],$$

容易知道$|S_n(x) - S(x)|$在$x = \dfrac{n}{n+1}$取到最大值，从而

$$d(S_n, S) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right) / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

这就说明$\{S_n(x)\}$在$[0, 1]$一致收敛于$S(x) = 0$.

定理 2 设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合D 上点态收敛于$S(x)$，则$\{S_n(x)\}$在D 上一致收敛于$S(x)$的充分必要条件是：对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in$ D，成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0.$$

证 设$\{S_n(x)\}$在**D**上一致收敛于$S(x)$，则

$$\mathrm{d}(S_n, S)=\sup_{x\in\mathbf{D}}|S_n(x)-S(x)|\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

于是对任意数列$\{x_n\}$，$x_n\in\mathbf{D}$，成立

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|\leqslant \mathrm{d}(S_n, S)\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

关于充分性，我们采用反证法，也就是证明：若$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上不一致收敛于$S(x)$，则一定能找到数列$\{x_n\}$，$x_n\in\mathbf{D}$，使得$S_n(x_n)-S(x_n) \not\to 0(n\to\infty)$。

我们已经知道，命题"$\{x_n\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$"可以表述为

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, \ \forall n>N, \forall x\in\mathbf{D}: \ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

于是它的否定命题"$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上不一致收敛于$S(x)$"可以表述为：

$$\exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N, \exists x\in\mathbf{D}: \ |S_n(x)-S(x)|\geqslant\varepsilon_0$$

于是下述步骤可以依次进行：

取 $N_1=1$，$\exists n_1>1$，$\exists x_{n_1}\in\mathbf{D}$：$|S_{n_1}(x_{n_1})-S(x_{n_1})|\geqslant\varepsilon_0$，

取 $N_2=n_1$，$\exists n_2>n_1$，$\exists x_{n_2}\in\mathbf{D}$：$|S_{n_2}(x_{n_2})-S(x_{n_2})|\geqslant\varepsilon_0$，

……

取 $N_k=N_{k-1}$，$\exists N_k>N_{k-1}$，$\exists x_{n_k}\in\mathbf{D}$：$|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$，

……

对于$m\in\mathbf{N}^+\backslash\{n_1, n_2, ...n_k, ...\}$，可以任取$x_m\in\mathbf{D}$，这样就得到数列$\{x_n\}$，$x_n\in\mathbf{D}$，由于它的子列$x_{n_k}$使得

$$|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0,$$

显然不可能成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n))=0 \ 。$$

证毕

定理 2 常用于判断函数序列的不一致收敛性。例如对例 6 中的$S_n(x)=x^n$，$x\in[0, 1)$，我们可以取$x_n=1-\frac{1}{n}\in[0, 1)$，则$S_n(x)-S(x)=(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{\mathrm{e}}$ $(n\to\infty)$，这说明$\{S_n(x)\}$在［0，1)上不一致收敛于$S(x)=0$；对于例 10.1.8 中的$S(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$，$x\in(0, +\infty)$，我们可以取$x_n=\frac{1}{n}$，则$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}$同样也说明$\{S_n(x)\}$在$(0, +\infty)$不一致收敛于$S(x)=0$.

例 9 设$S_n(x)=nx(1-x^2)^n$，$x\in[0, 1]$(见例 4)，则$\{S_n(x)\}$在［0，1］收敛于$S(x)=0$。我们取$x_n=\frac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=(1-\frac{1}{n^2})^n\to 1 \quad (n\to\infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在［0，1］上不一致收敛于$S(x) = 0$。

4．注意点

（1） 由于函数项级数与函数序列的收敛性在本质上是一致的，所以在举例时，我们都选择函数序列的例子，而所得到的结论对函数项级数也是成立的。

（2） 由于函数的连续性与可求导性是函数的局部性质，因此对于函数项级数与极限运算和求导运算的交换问题，只需要内闭一致收敛的概念即可。通过学习，不仅要求学生掌握内闭一致收敛的概念，而且要求学生会判断何时需要函数项级数在整个区间上的一致收敛的条件，何时只需要内闭一致收敛的条件就够了。

（3） 定理 2 的充分性条件的证明中，用到如何对一个命题的否定命题作分析表述，这在极限论部分的教学中已经作过讲述，这里应该再次强调，加以巩固。

（4） 函数项级数与函数序列的一致收敛性是很抽象的概念，学生不容易掌握，在讲课时必须结合图象演示，提高直观性，使学生更好地理解点态收敛与一致收敛的区别，一致收敛与内闭一致收敛的区别。