教案

函 数 的 幂 级 数 展 开

复 旦 大 学　 陈纪修　金路

1．　教学内容

函数的幂级数（Taylor 级数）展开是数学分析课程中最重要的内容之一，也是整个分析学中最有力的工具之一。通过讲解将函数展开成幂级数的各种方法，比较它们的优缺点，使学生在充分认识函数的幂级数展开的重要性的基础上，掌握如何针对不同的函数选择最简单快捷的方法来展开幂级数，提高学生的计算与运算能力。

2．指导思想

（1）函数的幂级数（Taylor 级数）展开作为一个强有力的数学工具，在分析学中占有举足轻重的地位。通常的数学分析教科书往往注重于讲解幂级数的理论，而忽视了讲解将函数展开成幂级数的方法，这样容易造成学生虽然掌握了幂级数的基本理论，但在实际计算中，即使对于一个很简单的函数，在求它的幂级数展开时也会感到很困难，这种状况必须加以改变。

（2）求函数的幂级数展开是每个数学工作者时时会碰到的问题，虽然我们有函数的幂级数展开公式（见下面的（*）式），但一般来说，直接利用（*）式来求函数的幂级数展开往往很不方便，因此有必要向学生介绍一些方便而实用的幂级数展开方法，提高学生的实际计算能力，这也是我们在数学分析课程中推行素质教育的一个不可忽视的环节。

3. 教学安排

首先回顾在讲述幂级数理论时已学过的相关内容：设函数$f(x)$在 x_0 的某个邻域$O(x_0, r)$中能展开幂级数，则它的幂级数展开就是$f(x)$ 在x_0 的Taylor级数：

（*）
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in O(x_0,r).$$

另外我们已得到了以下一些基本的幂级数展开式：

(1)
$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\frac{x^n}{n!}+\ \cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty)。$$

(2)
$$f(x)=\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ \cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)。$$

(3) $f(x)=\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty)。$$

(4) $f(x)=\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\qquad x\in[-1,1]。$$

(5) $f(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\qquad x\in(-1,1]。$$

(6) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$，α ≠0 是任意实数。

当α是正整数 m 时，

$$f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\cdots+mx^{m-1}+x^m，x\in(-\infty,+\infty)$$

即它的幂级数展开就是二项式展开，只有有限项。

当α不为 0 和正整数时，

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\qquad \begin{cases} x\in(-1,1), & 当\alpha\le -1,\\ x\in(-1,1], & 当-1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & 当\alpha>0.\end{cases}$$

其中 $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!},(n=1,2,\cdots)$ 和 $\binom{\alpha}{0}=1$。

设函数$f(x)$在 x_0 的某个邻域$O(x_0,r)$中任意阶可导，要求它在$O(x_0,r)$中的幂级数展开，一开始就考虑利用公式（*）往往不是明智之举。下面我们通过具体实例介绍幂级数展开的一些方便而实用的方法：

1．通过各种运算与变换，将函数化成已知幂级数展开的函数的和。

例 1 求 $f(x)=\frac{1}{3+5x-2x^2}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开。

解 利用部分分式得到

$$f(x)=\frac{1}{21}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)+\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{1+2x}\right),$$

再利用（6）式（$\alpha=-1$），得到

$$f(x)=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}-(-2)^{n+1}\right]x^n,\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

例2 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 的幂级数展开。

解 $f(x)=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}+(x-\frac{\pi}{6})\right)-\frac{1}{4}\cos 3(x-\frac{\pi}{6})$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\sin(x-\frac{\pi}{6})+\frac{3}{8}\cos(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}\cos 3(x-\frac{\pi}{6}),$$

利用（2）式与（3）式，即得到

$$f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{6})^{2n+1}-\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2\cdot 3^{2n-1}-1)(x-\frac{\pi}{6})^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例3 求 $f(x)=\ln x,\quad (x>0)$ 关于变量 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂级数展开。

解 令 $t=\frac{x-1}{x+1}$，则 $x=\frac{1+t}{1-t}$，$(0<t<1)$。利用（5）式，即得到

$$\ln x=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot t^{2n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot(\frac{x-1}{x+1})^{2n+1},\quad x>0.$$

2．对已知幂级数展开的函数进行逐项求导或逐项积分。

例 4 求 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 的幂级数展开。

解 由于 $g(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$，利用逐项求导，即可得到

$$f(x)=-g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n,\quad x\in(0,2).$$

例 5 求 $f(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 的幂级数展开。

解 利用(6)式 $(\alpha=-\frac{1}{2})$，可知当 $x\in(-1,1)$时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots,$$

对等式两边从 0 到 x 积分，利用幂级数的逐项可积性与

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x,$$

即得到

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad x\in[-1,1]。$$

其中关于幂级数在区间端点 $x=\pm1$ 的收敛性，可用 Raabe 判别法得到。
特别，取 $x=1$，我们得到关于 π 的一个级数表示：

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}。$$

3．对形如 $f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 的函数，可分别用 Cauchy 乘积与“待定系数法”。

设 $f(x)$ 的幂级数展开为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，收敛半径为$R_1$，$g(x)$ 的幂级数展开为 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，

收敛半径为R_2，则$f(x)g(x)$的幂级数展开就是它们的Cauchy乘积：

$$f(x)g(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad,$$

其中$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径$R\geq\min\{R_1,R_2\}$。

当$b_0\neq 0$时，我们可以通过待定系数法求$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的幂级数展开：设

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\quad,$$

则

$$(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\quad,$$

分离x的各次幂的系数，可依次得到

$$b_0c_0=a_0\qquad\Rightarrow\qquad c_0=\frac{a_0}{b_0},$$

$$b_0c_1+b_1c_0=a_1\qquad\Rightarrow\qquad c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0}\quad,$$

$$b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0=a_2\qquad\Rightarrow\qquad c_2=\frac{a_2-b_1c_1-b_2c_0}{b_0},$$

$$\cdots\cdots$$

一直继续下去，可求得所有的c_n。

例 6　求$e^x\sin x$的幂级数展开(到x^5)。

解　$$e^x\sin x=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots,$$

由于e^x与$\sin x$的收敛半径都是$R=\infty$,所以上述幂级数展开对一切$x\in(-\infty,+\infty)$都成立。

例 7　求$\tan x$的幂级数展开(到x^5)。

解　由于$\tan x$是奇函数，我们可以令

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots,$$

于是

$$(c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots)(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

比较等式两端x, x^3与x^5 的系数，就可得到

$$c_1=1,\quad c_3=\frac{1}{3},\quad c_5=\frac{2}{15},$$

因此

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots。$$

4.　“代入法”

对于例 7，我们还可采用如下的“代入法”求解：在

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + \cdots$$

中，以 $u = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$ 代入，可得到

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots,$$

然后求 $\sin x$ 与 $\frac{1}{\cos x}$ 的 Cauchy 乘积，同样得到上述关于 $\tan x$ 的幂级数展开。

需要向学生指出的是，利用“待定系数法”与“代入法”求幂级数展开，我们目前无法得到它的收敛范围，而只能知道在 $x = x_0$ 的小邻域中，幂级数展开是成立的（事实上，$\tan x$ 的幂级数展开的收敛范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，它的证明需要用到复变函数的知识）。

“代入法”经常用于复合函数，例如形如 $e^{f(x)}$，$\ln(1 + f(x))$ 等函数的求幂级数展开问题。

例 8 求 $f(x) = e^{\sin x}$ 在 $x = 0$ 的幂级数展开(到 x^4)

解 以 $u = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$ 代入

$$f(x) = e^{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + \cdots,$$

即可得到

$$f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)。$$

注 对于求函数 $f(x) = e^{\cos x}$ 在 $x = 0$ 的幂级数展开问题，我们不能采用以 $u = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$ 代入 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!}$ 的方法，请学生思考为什么，并思考应该怎样正确使用“代入法”。

例 9 求 $\ln\frac{\sin x}{x}$ 的幂级数展开(到 x^4)，其中函数 $\frac{\sin x}{x}$ 应理解为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

解 首先，利用 $\sin x$ 的幂级数展开，可以得到

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots。$$

令 $u = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$ 代入 $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots$，即得

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)^2 + \cdots$$
$$= -\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\cdots。$$

利用例 9，我们可以得到一些有趣的结果。在前面我们已得到等式

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

两边取对数，再分别将 $\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 展开成幂级数，

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)。$$

将上式与本例中的结果相比较，它们的x^2系数，x^4系数都对应相等，于是就得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}。$$

如果我们在计算时更精细些，也就是将$\ln\dfrac{\sin x}{x}$的幂级数展开计算到x^6，x^8，$\cdots$，还可以获得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$，$\cdots$的精确值。

注意点

1． 如果 $f(x)$ 在 x_0 邻域的幂级数展开存在，则幂级数必然是它在 x_0 的Taylor级数（*）；但反之则不然。事实上，我们举出过在 $x=x_0$ 任意阶可导的函数 $f(x)$，它在 x_0 的Taylor级数并不收敛于 $f(x)$。但一般来说，对于有解析表达式的初等函数 $f(x)$，只要它在 $x=x_0$ 任意阶可导，则它在 x_0 的Taylor级数就是它在 x_0 邻域的幂级数展开。
2． 要让学生知道，遇到求函数的幂级数展开问题，不要首先想到用（*）式。事实上，上面我们介绍的求幂级数展开的一些方法，比起直接利用公式（*）来都要方便，而学生应该学会如何在上述方法中选择一种最方便最快捷的方法。
3． 一般来说，利用“待定系数法”与“代入法”求幂级数展开，我们往往只能求出幂级数的初始几项，而不易求出幂级数的一般项，也不易求出幂级数的收敛半径。但是对于许多具体问题，只要求出幂级数的初始几项就够了，例如例 9 中的问题。关于幂级数的收敛半径，等学生学习了复变函数课程后就很容易确定。