教案

用多项式逼近连续函数

复 旦 大 学 陈纪修 金路

教学内容

介绍前苏联数学家 Korovkin 关于用多项式逼近连续函数的定理（Weierstrass 第一逼近定理）的一种证明。

指导思想

用多项式逼近连续函数，是经典分析学中重要的结果，以往教材中介绍的证明都比较艰深，学生难以理解。我们发现了前苏联数学家 Korovkin 的一种证明，思想新颖，方法简单，且通过对多项式逼近连续函数的学习，可以使学生进一步理解一致收敛的概念。

教学安排

先给出多项式一致逼近连续函数的定义：

定义 10.5.1 设函数$f(x)$在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，如果存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在$[a, b]$ 上一致收敛于$f(x)$，则称$f(x)$在这闭区间上可以用多项式一致逼近。

应用分析语言，“ $f(x)$在 $[a, b]$ 上可以用多项式一致逼近 ” 可等价表述为：

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a, b]$ 成立。

这一定理的证法很多，我们则介绍前苏联数学家 Korovkin 在 1953 年给出的证明。

定理 10.5.1(**Weierstrass 第一逼近定理**) 设$f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a, b]$ 成立。

证 不失一般性，我们设 $[a, b]$ 为 $[0, 1]$ 。

设 X 是 $[0, 1]$ 上连续函数全体构成的集合，Y 是多项式全体构成的集合，现定义映射

$$B_n:\ X \to Y$$

$$f(\mathrm{t}) \mapsto B_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}\ ,$$

这里$B_n(f, x)$ 表示$f\in X$在映射B_n作用下的像，它是以x为变量的n次多项式，称为**Bernstein**多项式。

关于映射B_n，直接从定义出发，可证明它具有下述基本性质与基本关系式：

(1) B_n 是线性映射，即对于任意$f, g\in X$及$\alpha, \beta\in R$，成立

$$B_n(\alpha f+\beta g, x)=\alpha B_n(f, x)+\beta B_n(g, x)\ ;$$

(2) B_n具有单调性，即对于任意$f, g\in X$，若$f(t)\geq g(t)$ （$t\in[a, b]$） 成立，

则

$$B_n(f, x) \geq B_n(g, x)$$

对一切 $x\in[a, b]$成立；

(3) $B_n(1, x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$；

$$B_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x[x + (1-x)]^n = x；$$

$$B_n(t^2, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x-x^2}{n}。$$

综合上述三式，考虑函数 $(t - s)^2$在B_n 映射下的像，注意s在这里被视为常数，我们得到

$$B_n((t - s)^2, x) = B_n(t^2, x) - 2sB_n(t, x) + s^2 B_n(1, x)$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2sx + s^2 = \frac{x-x^2}{n} + (x - s)^2。$$

现在我们来证明定理。

由于函数f 在[0, 1]连续，所以必定有界，即存在 $M>0$，对于一切$t \in[0, 1]$ ，成立

$$|f(t)| \leq M；$$

而根据 Cantor 定理，f 在[0, 1]一致连续，于是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $t, s \in[0, 1]$，

当$|t - s|<\delta$时，成立

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

当$|t - s| \geq \delta$时，成立

$$|f(t) - f(s)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta^2}(t - s)^2。$$

也就是说，对一切 $t, s \in[0, 1]$，成立

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2}(t - s)^2 \leq f(t) - f(s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t - s)^2。$$

考虑上式的左端，中间，右端三式(关于t的连续函数)在映射B_n 作用下的像(关于x的多项式)，注意$f(s)$在这里被视为常数，即$B_n(f(s), x) = f(s)$，并根据上面性质(1)，(2)与(3)，得到对一切$x, s \in[0, 1]$，成立

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n} + (x - s)^2\right] \leq B_n(f, x) - f(s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n} + (x - s)^2\right],$$

令 $s = x$，且注意 $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$，即得

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}。$$

取 $N = [\frac{M}{\delta^2 \varepsilon}]$，当 $n > N$ 时,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0, 1]$成立。

证毕

定理 10.5.1 还可以表述为： 设f 在 $[a, b]$ 连续，则它的Bernstein多项式序列 $\{B_n(f, x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于f 。

注意点

（1）学生容易误认为：只要将 $f(x)$在 $[a, b]$ 上展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in [a, b] \ ,$$

然后令其部分和函数（多项式）

$$S_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \ ,$$

则$f(x)$在 $[a, b]$ 上就可以由多项式序列 $\{S_n(x)\}$ 一致逼近了。

事实上，对任意正整数n，n次多项式$S_n(x)$只能是在n-1 次多项式$S_{n-1}(x)$的基础上增加一项$a_n(x - x_0)^n$，而不能更改$S_{n-1}(x)$的任何一项。但是这么做需要函数具有很好的分析性质，因为一个函数能展开成幂级数的必要条件之一是它任意次可导，而对仅要求“一个函数可以用多项式一致逼近”来说，这个条件实在是过分强了。究其原因，幂级数的部分和函数序列只是多项式序列的一种特殊情况。如果不是用幂级数，而是用一般的多项式序列来逼近，则对函数的要求就可以弱得多。事实上，Weierstrass 首先证明了：闭区间 $[a, b]$上任意连续函数 $f(x)$都可以用多项式一致逼近。

（2）定理证明有许多方法，例如还有 Bernstein 给出的证明等。可以介绍同学自己去阅读相关的资料，对多项式逼近连续函数的不同证明进行比较，扩大知识面，提高学习能力。