书 评

书名：数学分析原理（英文版，第 3 版）

Principles of Mathematical Analysis （Third Edition）

作者：（美）Walter Rudin

出版商：机械工业出版社 2004

作者介绍

Walter Rudin，1921 年出生于奥地利维也纳的一个富裕的犹太人家庭，1938 年因祖国被纳粹德国占领而逃离奥地利，二次大战期间曾经服役于英国海军，二次大战结束后于 1945 年移民美国。

1953 年 Walter Rudin 于杜克大学获得数学博士学位，然后在麻省理工学院、罗切斯特大学、耶鲁大学等学校任教。从 1959 年起在威斯康星大学麦迪逊分校数学系任教。他的主要研究领域为调和分析、算子理论和复变函数，是这些研究领域的国际著名学者。

Walter Rudin 在麻省理工学院执教期间，写了这本著名的教科书“数学分析原理”作为大学生分析课程的教材，第一版于 1953 年出版，第二版与第三版分别于 1964 年与 1976 年出版。除“数学分析原理”外，他还著有另外两本名著：“实复分析”（Real and Complex Analysis，1966）和“泛函分析”（Functional Analysis，1973），这些教材已被翻译成 13 种语言，在世界各地广泛使用。以“数学分析原理”这本书作为教材的名校有加利福尼亚大学伯克利分校、哈佛大学、麻省理工学院等。

Walter Rudin在威斯康星大学麦迪逊分校数学系任教了 32 年，于 1991 年退休。退休后他写了一部自传小说“我的回忆”（The way I remember it），在书中他描述了他的早年生活、骚乱的战争年代、以及他的数学生涯。但是Walter Rudin作为数学家而闻名于世的还是这本著名的教科书“数学分析原理”，它被数学界亲切地称为“小鲁丁”（Baby Rudin），而另一本名著“实复分析”则被称为“大鲁丁”（Big Rudin）。正因为写了这两本数学名著，Walter Rudin 于 1993 年荣获美国数学会颁发的Leroy P. Steele奖。

Walter Rudin 于 2010 年 5 月 20 日因帕金森病逝世，享年 89 岁。Walter Rudin 一生除了为大学的数学教学作出了巨大贡献，还培养了 24 名研究生，他的妻子 Mary Ellen Rudin（也是威斯康星大学麦迪逊分校数学系的教授）在他去世后说：“他的工作将会被他的学生们一代一代地传承下去”。

本书主要特点

“数学分析原理”（第一版 1953 年，第二版 1964 年，第三版 1976 年）是一部近代数学名著，一直受到数学界的推崇。作为 Rudin 的分析学经典著作之一，本书在世界各国大学的数学教学中有着广泛而深远的影响，被许多高校用做数学分析课程的教材或教学参考书。

数学分析作为一门最重要的数学基础课程，其内容主要包括了“技巧”部分与“原理”部分。如果读者想通过学习本书得到各种运算方法的训练，掌握各种高超的解题技巧与积分技巧，那他定会感到失望的。“数学分析原理”的内容，正如其书名所述，是一本讲述“原理”的教科书，其中包含了分析学中几乎所有的重要基础理论，被称为“经典分析的字典”（Bible of Classical Analysis ）。对于有一定分析基础与代数基础的读者，如果能认认真真读完本书，认认真真做完书中的大部分习题，必定会对数学分析的理解有一个很大的提升。笔者认为，本书对读者学习后继课程如实分析、复分析、微分几何、泛函分析等能提供很好的桥梁作用，有助于读者今后能更自然地进入有关现代分析与几何课程的学习。

本书结构简单明了，内容叙述相当精练，这是 Rudin 著作的一大特色。有不少读者抱怨本书很难读，很抽象，事实确实如此，作者在许多定理的证明中故意留下了一些“空缺”，其中的细节让读者去填补。一旦读者经过思考，填补了这些空缺，就能对定理或命题有了深入的理解，也使自己得到了数学上的训练，有助于提高自己的逻辑思维能力。所以本书要求读者有一定的分析基础与代数基础，同时也对读者的数学水平与能力有一定的要求。对于没有微积分与线性代数基础的学生，我认为本书不适合作为他们初学数学分析的教材。但对于数学类专业的学生学习数学分析课程，本书是一本很好的学习参考书；对于担任数学分析课程教学的教师，本书是一本极佳的教学参考书。当然它也适合作为具有一定微积分与代数基础知识的大学高年级学生提高分析水平与能力的教材。

作者在许多内容上采用了现代数学的观点与方法，而且处理上方法新颖，具有创造性，取得了良好的效果。而这些好的处理方法也为世界数学同行们所肯定，为世界各国在编写分析教材时所采用。本书往往从最一般、最广泛的情况出发来叙述数学分析的内容与原理，对于这样的定理与命题，读者需要有一定的数学理解能力，善于从最基本的例子出发去加以理解。本书最精彩的部分集中在实数系与复数系、基础拓扑、函数序列与函数项级数、多变量函数的微分以及微分形式的积分等章节。具体地讲，在基础拓扑部分，书中介绍的是度量空间的拓扑，但结论对欧氏空间当然成立；讲述数列收敛概念时，讲的是度量空间上的点列收敛概念；在数项级数部分，叙述的是复数项级数；在 Riemann 积分部分，介绍的是 Riemann-Stieltjes 积分；探讨了紧集上连续函数构成的代数在一致收敛条件下的闭包问题， Weierstrass 第一逼近定理与第二逼近定理就成了直接的推论了；关于隐函数存在定理，作者通过压缩映射的不动点原理，证明了反函数存在定理，从而给出隐函数存在定理一个简洁的证明；在重积分的变量代换部分，通过将一般的变量代换转化成本原变换的复合，从而使证明简化；在曲线积分与曲面积分部分，引进了微分形式、外积、外微分与微分形式的积分的概念，从而给出 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式与 Newton-Leibniz 公式的统一形式；对于积分与路径无关的问题，作者引进了闭微分形式与恰当微分形式的概念，从

而给出问题的更一般的结论，等等。这些内容的叙述都是本书中的精彩部分，也是本书能成为经典著作的原因之所在。

一定数量的富有启迪的习题是一本好教材所不可或缺的。书中的习题经过了精心挑选，有深度与难度，其中有些是书中定理的深入与推广，有些则是学习中容易产生的错误断言的反例，它们的重要性绝不亚于书中的定理与命题。独立完成这些习题有助于读者提高逻辑思维与论证推理的能力，更好地掌握数学分析的基本原理。

本书主要内容

第一章　实数系与复数系。本章特色之处是关于实数系的建立与实数系连续性的证明。Rudin 将确界存在定理（有上（下）界的非空实数数集必有上（下）确界）作为实数系的连续性定理，采用 Dedkind 切割的方法加以证明，其中实数的引进采用对有理数作 Dedkind 切割的严格方法。实数系作为微积分的基础，每本教科书都会讲述实数系连续性，但一般都无法讲述得很严格，象本书那样在教科书中对实数系的连续性给出严格证明的确实很少见。

第二章　基础拓扑。对于分析课程中要用到的拓扑基础知识，本章中作了全面而详细的介绍。特别是 n 维欧氏空间的拓扑，包括紧集、完备集、连通性等概念，作者是在更一般的度量空间意义上给出的，如连通的概念是从拓扑意义上给出的，而不是道路连通的意义，这对学生以后学习拓扑学是有帮助的。

第三章　数列与数项级数。关于数列收敛的概念作者是通过介绍度量空间中点列的收敛概念来引进的。关于级数，作者是通过直接引入复数项级数来展开的。事实上，数项级数的许多性质，如级数的收敛判别法、绝对收敛级数的性质、级数的相乘、级数的换序等问题的结论，对实数项级数与复数项级数都是成立的。

第四章　连续。作者在度量空间上引进连续映射的概念，讨论了连续与紧性、连续与连通的关系问题，也介绍了“开集的原像是开集”这一关于连续性的拓扑等价命题，最后对单调函数的连续性作了深入的讨论。

第五章　微分。本章介绍了导数概念、中值定理及其应用等内容，与其他教科书比较没有特殊之处。但值得注意的是作者指出了导函数具有的一个重要性质：中间值定理，这是一般教科书很少提到的。

第六章　Riemann-Stieltjes 积分。作者通过介绍 Riemann-Stieltjes 积分 $\int_a^b f\,d\alpha$ 来讲述 Riemann 积分，其中积分仪 $\alpha(x)$ 是单调增加函数（但是对于微积分基本定理与分部积分法的讲述是关于 Riemann 积分的）。笔者认为这里可以将积分仪 $\alpha(x)$ 的定义推广为有界变差函数。而且有了有界变差函数的概念，后面叙述曲线长度的定义就会更深刻。在本章最后介绍了向量值函数的积分概念、曲线长度的计算公式，其中对曲线长度给出了严格的定义。

第七章　函数项序列与函数项级数。本章介绍了函数序列与函数项级数的一致收敛概念，探讨了在一致收敛情况下极限运算的可交换性质，在这个问题上讨论得相当透彻。然后讨论了函数族的平等连续性与函数序列的紧性问题（通常这部分内容是出现在实分析的课程中的），证明了连续函数的多项式一致逼近定理（Weierstrass 第一逼近定理），并证明了它的推广形式：Stone-Weierstrass

定理。

第八章　一些特殊函数。本章包括幂级数、Fourier 级数、Gamma 函数与 Beta 函数等内容。本章中下述内容值得关注：由指数函数的幂级数表示给出了三角函数的定义、代数基本定理的证明、关于函数 Fourier 级数展开的 Parseval 等式、连续周期函数的三角多项式一致逼近定理（Weierstrass 第二逼近定理）、Stirling 公式的证明，等。

第九章　多变量函数。本章讲述的是多元函数的微分学，作者尽可能地使用了线性代数的知识，使得叙述简洁与明了，但对于代数基础较差的学生，理解会有些困难。关于隐函数存在定理，一般教材或者证明很烦琐，或者干脆略去证明，但 Rudin 利用压缩映射的不动点理论，先证明了反函数存在定理，然后给出隐函数存在定理一个简洁的证明。

第十章　微分形式的积分。本章讲述的是多元函数的积分学，包括重积分、曲线积分与曲面积分等内容。在重积分的变量代换部分，作者引进了本原变换的概念，将一般的变量代换转化成本原变换的复合，由于本原变换的变量代换公司容易证明，从而简化了重积分的变量代换公式的证明。在叙述曲线积分与曲面积分时，作者引进了微分形式、外积、外微分与微分形式的积分的概念，从而使 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式与 Newton-Leibniz 公式这些数学分析中最重要的结果，统一成一个公式，成为数学科学最漂亮的结果之一，同时也为学生以后学习现代分析的内容，如流形上的微积分等打下基础。作者最后还讨论了闭微分形式与恰当微分形式的概念，而这部分内容包含了积分与路径无关的问题。

第十一章　Lebesque 积分。本章讲述 Lebesque 积分的定义与性质，包括 Lebesque 单调收敛定理、Fatou 定理与 Lebesque 控制收敛定理等，并对 Lebesque 积分与 Riemann 积分进行了比较。但本章由于叙述过于简单而受到较多的批评，笔者认为，对于以后要学习实分析的学生，没必要在学习数学分析阶段学习 Lebesque 积分，也就是可以略过这一章。

[目录]

Euclidean Spaces	欧氏空间
Appendix	附录
Exercises	习题
Chapter2 Basic Topology	第 2 章　基础拓扑
Finite, Countable, and Uncountable Sets	有限集、可数集和不可数集
Metric Spaces	度量空间
Compact Sets	紧集
Perfect Sets	完全集
Connected Sets	连通集
Exercises	习题
Chapter3 Numerical Sequences and Series	第 3 章　数列与级数
Convergent Sequences	收敛序列
Subsequences	子序列
Cauchy Sequences	Cauchy 序列
Upper and Lower Limits	上极限和下极限
Some Special Sequences	一些特殊序列
Series	级数
Series of Nonnegative Terms	非负项级数
The Number e	数 e
The Root and Ratio Tests	根值判别法与比值判别法
Power Series	幂级数
Summation by Parts	分部求和法

Absolute Convergence	绝对收敛
Addition and Multiplication of Series	级数的加法和乘法
Rearrangements	级数的重排
Exercises	习题
Chapter4 Continuity	第 4 章　连续性
Limits of Functions	函数的极限
Continuous Functions	连续函数
Continuity and Compactness	连续性与紧性
Continuity and Connectedness	连续性与连通性
Discontinuities	间断
Monotonic Functions	单调函数
Infinite Limits and Limits at Infinity	无限极限与在无穷远点的极限
Exercises	习题
Chapter5 Differentiation	第 5 章　微分
The Derivative of a Real Function	实函数的导数
Mean Value Theorems	中值定理
The Continuity of Derivatives	导数的连续性
L'Hospital's Rule	L'Hospital 法则
Derivatives of Higher Order	高阶导数
Taylor's Theorem	Taylor 定理
Differentiation of Vector-valued Functions	向量值函数的微分
Exercises	习题

Chapter6 The Riemann-Stieltjes Integral	第 6 章　Riemann-Stieltjes 积分
Definition and Existence of the Integral	积分的定义和存在性
Properties of the Integral	积分的性质
Integration and Differentiation	积分与微分
Integration of Vector-valued Functions	向量值函数的积分
Rectifiable Curves	可求长曲线
Exercises	习题
Chapter7 Sequences and Series of Functions.	第7章　函数序列与函数项级数
Discussion of Main Problem	主要问题的讨论
Uniform Convergence	一致收敛性
Uniform Convergence and Continuity	一致收敛性与连续性
Uniform Convergence and Integration	一致收敛性与积分
Uniform Convergence and Differentiation	一致收敛性与微分
Equicontinuous Families of Functions	等度连续的函数族
The Stone-Weierstrass Theorem	Stone-Weierstrass 定理
Exercises	习题
Chapter8 Some Special Functions	第 8 章　一些特殊函数
Power Series	幂级数
The Exponential and Logarithmic Functions	指数函数与对数函数
The Trigonometric Functions	三角函数
The Algebraic Completeness of the Complex Field	复数域的代数完备性
Fourier Series	Fourier 级数

The Gamma Function	Gamma 函数
Exercises	习题
Chapter9 Functions of Several Variables	第 9 章　多元函数
Linear Transformations	线性变换
Differentiation	微分
The Contraction Principle	压缩原理
The Inverse Function Theorem	反函数定理
The Implicit Function Theorem	隐函数定理
The Rank Theorem	秩定理
Determinants	行列式
Derivatives of Higher Order	高阶导数
Differentiation of Integrals	积分的微分法
Exercises	习题
Chapter10 Integration of Differential Forms	第 10 章　微分形式的积分
Integration	积分
Primitive Mappings	本原映射
Partitions of Unity	单位分割
Change of Variables	变量代换
Differential Forms	微分形式
Simplexes and Chains	单形与链
Stokes' Theorem	Stokes 定理
Closed Forms and Exact Forms	闭形式与恰当形式

Vector Analysis	向量分析
Exercises	习题
Chapter11 The Lebesgue Theory	第 11 章 Lebesgue 理论
Set Functions	集函数
Construction of the Lebesgue Measure	Lebesgue 测度的建立
Measure Spaces	测度空间
Measurable Functions	可测函数
Simple Functions	简单函数
Integration	积分
Comparison with the Riemann Integral	与 Riemann 积分的比较
Integration of Complex Functions	复函数的积分
Functions of Class L^2	L^2 函数族
Exercises	习题
Bibliography	参考书目