2010年复旦大学数学竞赛分析卷

学　校： ____________ **院　系：** _______________

姓　名： _________ **学　号：** ________ **专　业：** ____________

题　目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

一 **(12%)**、　证明:

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y-\frac{t^2}{y}} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad \forall\, t > 0.$$

二 **(13%)**、　设 f 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数, 满足

$$\int_{-1}^{1} x f(x)\, dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1.$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y| f(x) f(y)\, dxdy \geq \int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx.$$

三 **(15%)**、　定义

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x^2+1-\cos x)} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\, dx, \qquad \lambda > 0.$$

求 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\lambda}\, F(\lambda)$.

四 (15%)、　设 $p > 1$, f 在 $(0,+\infty)$ 连续且 $\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\, dt$ 收敛. 证明:

$$\left\{ \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|\, dt \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

五 (15%)、 设有可数个正数列 $\left\{a_n^{(k)}: n, k \geq 1\right\}$ 满足:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^{(k)} = 1, \qquad \forall\, k \geq 1.$

2. 记 $\mathbb{N}$ 为正整数集, 若对任何 $A \subset \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A} a_n^{(k)}$ 存在.

令 $a_n = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_n^{(k)}$. 证明: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = 1$.

六(15%)、 设 $a_n > 0$, 且 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = 1$. 证明

$$F \equiv \left\{ \sum_{n\in A} a_n : A \subset \mathbb{N} \right\}$$

是一个闭集(注: A 可以取空集), 其中 $\mathbb{N}$ 为正整数集.

七(15%)、 设 f 是 $[0,1]$ 上的右连续函数, $\mathbb{Q}$ 是 $[0,1]$ 上的有理数集. 若 f 沿着 $\mathbb{Q}$ 有左极限, 即 $\forall\, x \in (0,1]$,

$$\lim_{\substack{y\to x^-\\ y\in\mathbb{Q}}} f(y)$$

存在. 证明: f 在任何点 $x \in (0,1]$ 上有左极限.