第十三章

第 2 节

4. （1）1；（2）$\frac{1}{4}\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)\left(e^{d^2}-e^{c^2}\right)$；（3）$\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}$。

5．（1）$\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$；

（2）$\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx$；

（3）$\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$；

（4）$\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy$；

（5）$\int_0^1 dz\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy-\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^{z-x} f(x,y,z)dy$；

（6）$\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx$。

6．（1）$\frac{1}{21}p^5$；（2）$(2\sqrt{2}-\frac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$；（3）$e-\frac{1}{e}$；（4）$14a^4$；（5）$\frac{5\pi}{2}a^3$；（6）$-\frac{2}{3}$；

（7）$\frac{49}{20}$；（8）$\frac{1}{448}$；（9）$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$；（10）$\frac{1}{3}\pi h^3$；

（11）$\frac{59}{480}\pi R^5$. 提示：应用公式$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\int_0^R z^2dz\iint_{\Omega_z}dxdy$；

（12）$\frac{4}{15}\pi a^3bc$. 提示：应用公式$\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_{-a}^a x^2dx\iint_{\Omega_x}dydz$。

7．$\frac{4}{3}$.

8. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

9. $V=\frac{7}{2}$.

10. $V=\frac{1}{3}$.

11. $V=\frac{1}{6}$.

14. 提示：$\iint_D\left[\sin(x^2)+\cos(y^2)\right]dxdy=\int_0^1\frac{\sin t+\cos t}{2\sqrt{t}}dt$。

17. 提示：$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2=\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy\le\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}\left(f^2(x)+f^2(y)\right)dxdy$。

18. 提示：将区间$[a,b]$ n等分，并取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} e^{f(x)-f(y)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} e^{f(\xi_i)}\cdot\sum_{i=1}^{n} e^{-f(\xi_i)}\right\},$$

再利用不等式：当$x_i > 0$ （$i = 1,2,\cdots,n$）时成立

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}) \ge n^2。$$

19. （1） $\frac{n}{3}$ ；(2) $\frac{n(3n+1)}{12}$。

第 3 节

1. （1） $\pi(1-e^{-R^2})$ ；(2) $\frac{8}{15}$ ；(3) $\frac{\pi}{2}$ ；(4) $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$。

2. （1） $\frac{\pi}{|a_1b_2 - a_2b_1|}$ ；(2) $\frac{1}{6}(n^2-m^2)(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3})$ ；(3) $\frac{\pi}{4}a^2$ ；

 (4) $\frac{hk(a^2k^2+b^2h^2)}{6a^2b^2}$. 提示：作变量代换$\begin{cases} x = hr\cos^2\theta \\ y = kr\sin^2\theta \end{cases}$。

3. $f(0,0)$。

4．(1) $\frac{2}{15}$ ；(2) $\frac{\pi}{2}ab$ ；(3) $4-\frac{\pi}{2}$ ；(4) $e-\frac{1}{e}$ ；(5) $\frac{\pi}{6}$ ；(6) $\frac{(\pi^2-8)a^2}{16}$。

5．(1) $\frac{4\pi}{5}$ ；(2) $\frac{1}{4}\pi^2abc$ ；(3) $\frac{8}{9}a^2$ ；(4) $(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2)\pi$ ；

 (5) $\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5$ ；(6) $\frac{1024}{3}\pi$，(7) $\frac{4}{3}\pi$，(8) $\frac{1}{32}$。

6．$\frac{6\pi-8}{9}R^3$.

7. $\frac{32}{3}\pi$.

8. （1）$V = \frac{\pi}{3}a^3bc$ ； （2）$V = \frac{abc}{3}$. 提示：作变量代换$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos^2\theta \\ y = br\sin\varphi\sin^2\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$， 则

$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = abcr^2\sin\varphi\sin 2\theta$。

9. 8π.

10. $12cm$.

11. $\dfrac{2MG}{a^2}\left(1-\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$，其中$G$是万有引力常数.

12. 质量为$\dfrac{32}{15}\pi R^5$，重心为$(0,0,\dfrac{5}{4}R)$.

13．提示：证明第一个不等式时利用$\sin^2 x \le x^2$， $\sin^2 y \le y^2$.

14．提示：作变量代换$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$。

16. （1） $\dfrac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. 提示：作变量代换$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ y_2 = \quad\quad x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ \quad\cdots \\ y_n = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_n \end{cases}$，则

$$\int_\Omega \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_0^1\sqrt{y_1}\,dy_1\int_0^{y_1}dy_2\int_0^{y_2}dy_3\cdots\int_0^{y_{n-1}}dy_n$$。

（2） $\begin{cases} \dfrac{\pi^m}{(m-1)!(m+1)} & n=2m \\ \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!(2m+3)} & n=2m+1 \end{cases}$. 提示：参考例题 13.3.11。

第 4 节

1. （1）当$p>1$且$q>1$时积分收敛，其他情况下积分发散；

（2）当$p>\dfrac{1}{2}$时积分收敛，当$p\le\dfrac{1}{2}$时积分发散；

（3）当$p<1$时积分收敛，当$p\ge 1$时积分发散；

（4）当$p<1$时积分收敛，当$p\ge 1$时积分发散；

（5）当$p<\dfrac{3}{2}$时积分收敛，当$p\ge\dfrac{3}{2}$时积分发散。

2．（1） $\dfrac{1}{(p-q)(q-1)}$；（2） $\dfrac{\pi ab}{e}$；（3） $\pi^{\frac{3}{2}}$。

4．$I=\pi^2$。

5．提示：令$\begin{cases}x=tu\\ y=tv\end{cases}$，则$F(t)=t^2\cdot\iint\limits_{0\le u\le 1,0\le v\le 1}e^{-\frac{u}{v^2}}dudv$。

6．提示：$\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\pi$。

7．$\pi^{\frac{n}{2}}$。

第 5 节

1． （1） $-(x^2+7yz^2)dx\wedge dy+42z^2dy\wedge dz-6xdz\wedge dx$ ；

（2） $-\sin(x+y)dx\wedge dy$ ；

（3） $-21dx\wedge dy\wedge dz$ 。

2．$\omega+\eta=a_0+a_1dx_1+b_1dx_1\wedge dx_2+(a_2+b_2)dx_1\wedge dx_3$

$+b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+(a_3+b_4)dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$，

$\omega\wedge\eta=a_0b_1dx_1\wedge dx_2+a_0b_2dx_1\wedge dx_3+a_0b_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$

$+a_0b_4dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4+a_1b_4dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$。

3．$x_1dx_1\wedge dx_2+dx_1\wedge dx_3+(x_1^2+x_3)dx_2\wedge dx_3-(x_2^2+x_3^2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$。

5．（1） $rdr\wedge d\theta\wedge dz$ ；（2） $r^2\sin\varphi\, dr\wedge d\varphi\wedge d\theta$ 。