

习 题 1.1

证明由 n 个元素组成的集合 $T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 有 2^n 个子集。

证明：

- (1) 任意无限集必包含一个可列子集；
- (2) 设 A 与 B 都是可列集，证明 $A \cup B$ 也是可列集。

指出下列表述中的错误：

- (1) $\{0\} = \emptyset$ ；
- (2) $a \subset \{a, b, c\}$ ；
- (3) $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$ ；
- (4) $\{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b\}$ 。

用集合符号表示下列数集：

- (1) 满足 $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ 的实数全体；
- (2) 平面上第一象限的点的全体；
- (3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体；
- (4) 方程 $\sin x \cot x = 0$ 的实数解全体。

证明下列集合等式：

- (1) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$ ；
- (2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 。

举例说明集合运算不满足消去律：

- (1) $A \cup B = A \cup C \quad \not\Rightarrow B = C$ ；
- (2) $A \cap B = A \cap C \quad \not\Rightarrow B = C$ 。

其中符号“ $\not\Rightarrow$ ”表示左边的命题不能推出右边的命题。

下述命题是否正确？不正确的话，请改正。

- (1) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ 并且 $x \in B$ ；
- (2) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ 或者 $x \in B$ 。

习 题 1.2

1. 设 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}, T = \{a, b, c\}$ ，问有多少种可能的映射 $f : S \rightarrow T$ ？其中哪些是双射？
2. (1) 建立区间 $[a, b]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应；

(2) 建立区间 $(0, 1)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 之间的一一对应。

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数, 并指出定义域与值域:

(1) $y = f(u) = \log_a u, u = g(x) = x^2 - 3;$

(2) $y = f(u) = \arcsin u, u = g(x) = 3^x;$

(3) $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}, u = g(x) = \sec x;$

(4) $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = \frac{x-1}{x+1}。$

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$

(2) $y = \frac{1}{3} \log_a^3(x^2 - 1)。$

5. 求下列函数的自然定义域与值域:

(1) $y = \log_a \sin x (a > 1);$

(2) $y = \sqrt{\cos x};$

(3) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2};$

(4) $y = x^2 + \frac{1}{x^4}。$

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x) = \log_a(x^2), g(x) = 2\log_a x;$

(2) $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x, g(x) = 1;$

(3) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = 1。$

7. (1) 设 $f(x+3) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, 求 $f(x);$

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3x-1}{3x+1}$, 求 $f(x)。$

8. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f \circ f, f \circ f \circ f, f \circ f \circ f \circ f$ 的函数表达式。

9. 证明: 定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和。

10. 写出折线 \overline{ABCD} 所表示的函数关系 $y = f(x)$ 的分段表示, 其中 $A = (0, 3),$

$B = (1, -1), C = (3, 2), D = (4, 0)。$

11. 设 $f(x)$ 表示图1.2.8中阴影部分面积，写出函数 $y = f(x)$, $x \in [0, 2]$ 的表达式。

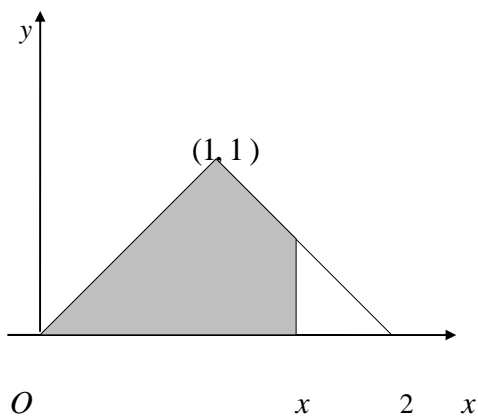


图 1.2.8

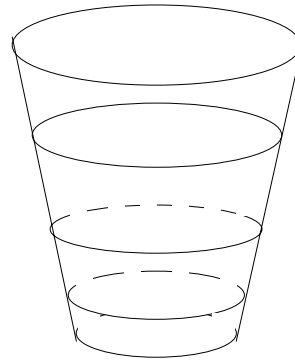


图 1.2.9

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，比重分别为13.6，1，0.8克/厘米³(图1.2.9)，上层煤油液体高度为5厘米，中层水液体高度为4厘米，下层汞液体高度为2厘米，试求压强 P 与液体深度 x 之间的函数关系。
13. 试求定义在 $[0, 1]$ 上的函数，它是 $[0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应，但在 $[0, 1]$ 的任一子区间上都不是单调函数。