第十一章

第 1 节

4. (1) $\mathbf{S}^{\circ}=\{(x,y)|x>0,y\neq 0\}$；$\partial\mathbf{S}=\{(x,y)|x=0\text{或}x>0,y=0\}$；$\overline{\mathbf{S}}=\{(x,y)|x\geq 0\}$.

(2) $\mathbf{S}^{\circ}=\{(x,y)|0<x^2+y^2<1\}$；$\partial\mathbf{S}=\{(x,y)|x^2+y^2=0\text{或}x^2+y^2=1\}$；

$\overline{\mathbf{S}}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$.

(3) $\mathbf{S}^{\circ}=\varnothing$；$\partial\mathbf{S}=\left\{(x,y)\middle|0<x\leq 1,y=\sin\frac{1}{x}\text{或}x=0,-1\leq y\leq 1\right\}$；

$\overline{\mathbf{S}}=\left\{(x,y)\middle|0<x\leq 1,y=\sin\frac{1}{x}\text{或}x=0,-1\leq y\leq 1\right\}$.

5. (1) $\mathbf{S'}=\{\pm 1\}$;

(2) $\mathbf{S'}=\left\{(1,0),(\cos\frac{2\pi}{5},\sin\frac{2\pi}{5}),(\cos\frac{4\pi}{5},\sin\frac{4\pi}{5}),(\cos\frac{6\pi}{5},\sin\frac{6\pi}{5}),(\cos\frac{8\pi}{5},\sin\frac{8\pi}{5})\right\}$;

(3) $\mathbf{S'}=\{(x,y)|y^2-x^2+1\leq 0\}$.

第 2 节

1.(1) $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1,\ y>x\}$;

(2) $D=\{(x,y,z)|\ x>0,y>0,z>0\}$;

(3) $D=\{(x,y,z)|\ r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$;

(4) $D=\{(x,y,z)|\ |z|\leq x^2+y^2,\ x^2+y^2\neq 0\}$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. $f(x)=x^2+2x$, $z(x,y)=x+\sqrt{y}-1$.

4. (1) 不存在；(2) 不存在；(3) 不存在；
(4) 极限存在为零. 提示: 利用平均值不等式

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^4+y^8}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8}.$$

7. （1）1;（2）$+\infty$;（3）$\frac{1}{2}$;（4）2;（5）1;（6）0;（7）$+\infty$;（8）0.

8. (1) 两个二次极限存在为0，二重极限不存在；

（2）两个二次极限存在分别为1和-1，二重极限不存在；

（3）两个二次极限不存在，二重极限存在为0。

11. 提示：利用 Lagrange 中值定理 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$.

12．提示: 利用$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|\le\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|+\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|$.

第 3 节

3. 提示：$f(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})-f(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})\to+\infty$.

5.（1）提示：任取一点(x_0,y_0)，由$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，可知存在$R>0$，当$x^2+y^2>R^2$，成立$f(x,y)>f(x_0,y_0)$。$f(x,y)$在紧集$\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$上必定取到最小值，且此最小值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最小值；

(2) 提示：任取(x_0,y_0)，设$f(x_0,y_0)>0$，由$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=0$，可知存在$R>0$，当$x^2+y^2>R^2$，成立$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则$f(x,y)$在紧集$\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$上必定取到最大值，且此最大值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最大值；若$f(x_0,y_0)<0$，由$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=0$，可知存在$R>0$，当$x^2+y^2>R^2$，成立$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则$f(x,y)$在紧集$\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$上必定取到最小值，且此最小值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最小值。

6．提示：单位球面是$\mathbf{R}^n$上的紧集，设f在单位球面上的最小最大值分别为a和b，再利用$f(x)=|x|f\left(\frac{x}{|x|}\right)$。

8. 提示: 设$\varsigma\in\partial D$，证明对任意点列$\{x_n\}$（$x_n\in D$，$x_n\to\varsigma$），点列$\{f(x_n)\}$收敛，且极限只与ς有关，而与点列$\{x_n\}$的选取无关，记该极限为$g(\varsigma)$，令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in D\\ g(x) & x\in\partial D\end{cases},$$

再证明$\tilde{f}$在$\overline{D}$连续。