第十四章

第 1 节

1. （1） $1+\sqrt{2}$ ；(2) 4 ；

（3） $4a^{\frac{4}{3}}$．提示：将 L 的参数方程取为 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ ；

（4） $2\sqrt{2}$．提示：将 L 的参数方程取为 $\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \\ y = \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \end{cases}$ ；

（5） $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2+b^2}$ ；(6) $\frac{16\sqrt{2}}{143}$ ；

（7） $-\pi a^3$．提示：在 L 上成立 $xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]$。

2．当 $a>b$ ： $2b^2+\frac{2a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ；

当 $a<b$ ： $2b^2+\frac{2a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)$ ；

当 $a=b$ ： $4a^2$。

3．(1) $\frac{2\pi}{3a^2}\left[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1\right]$ ；

（2） $8\sqrt{3}\pi a^2$．提示： $S=\iint_S dS=\iint_D 2dxdy$ ，其中

$D=\{(x,y)|(x^2-xy+y^2)+2a(x+y)\le 2a^2\}$。再令 $\begin{cases} x=u-v \\ y=u+v \end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2$ ，

$S=\iint_D 2dxdy=\iint_{D'} 4dudv$ ，其中 $D'=\{(u,v)|(u+2a)^2+3v^2\le 6a^2\}$。

（3） $(2-\sqrt{2})\pi a^2$ ；

（4） $2a^2$，提示： $S=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dzdx$ ， $D=\{(z,x)|-x\le z\le x, 0\le x\le a\}$。

（5） $\frac{20-3\pi}{9}a^2$ ；(6) $4\pi^2 ab$。

4．(1) $-\pi a^3$ ；(2) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi$ ；(3) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$ ；(4) $2\pi\arctan\frac{H}{a}$ ；

（5）$\frac{13}{9}\pi a^4$．提示：由对称性，$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS = \iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \iint\limits_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$；

（6）$\frac{1564\sqrt{17}+4}{15}\pi$．提示：由对称性，$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dS = 0$，$\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，

$\iint\limits_{\Sigma} zdS = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$；

（7）$\pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2}))$。

5．$R=\frac{4}{3}a$，$S_{\max}=\frac{32}{27}\pi a^2$．提示：设$\Sigma$的球心在$(0,0,a)$，则球面$\Sigma$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$内部的曲面为：$z=a-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2\le R^2(1-\frac{R^2}{4a^2})$，容易求得面积为$S=2\pi R^2(1-\frac{R}{2a})$。

6．质量为$\frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi$，重心为$(0,0,\frac{596-45\sqrt{3}}{749})$。

7．设质点离球心的距离为b，则$F=\begin{cases}0 & b<a\\ \frac{4\pi Ga^2}{b^2} & b>a\end{cases}$。

提示：设$\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=a^2\}$，质点位于$(0,0,b)$点，则球面对质点的引力为$F=\iint\limits_{\Sigma}\frac{G(b-z)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$。令$\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta\\ y=a\sin\varphi\sin\theta\\ z=a\cos\varphi\end{cases}$，则

$F=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{G(b-a\cos\varphi)a^2\sin\varphi}{(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$，再作变量代换$t^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi$。

8．（2）$\frac{R^2}{6}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$．提示：令$\begin{cases}x=x_0+R\xi\\ y=y_0+R\eta\\ z=z_0+R\varsigma\end{cases}$，则

$T(R)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma^*}u(x_0+R\xi,y_0+R\eta,z_0+R\varsigma)dS$，其中$\Sigma^*=\{(\xi,\eta,\varsigma)\,|\,\xi^2+\eta^2+\varsigma^2=1\}$.

利用对称性，有$\iint\limits_{\Sigma^*}\xi dS=\iint\limits_{\Sigma^*}\eta dS=\iint\limits_{\Sigma^*}\varsigma dS=0$；$\iint\limits_{\Sigma^*}\xi\eta dS=\iint\limits_{\Sigma^*}\eta\varsigma dS=\iint\limits_{\Sigma^*}\varsigma\xi dS=0$和

$\iint_{\Sigma^*}\xi^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\eta^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\varsigma^2\, dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma^*}(\xi^2+\eta^2+\varsigma^2)dS$ ；由此得到$T'(0)=0$和

$T''(0)=\frac{1}{3}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 。

9．$\frac{3}{2}\pi$．提示：过$p(x,y,z)$点的切平面为$xX+yY+2zZ=2$，原点到切平面的距离为

$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$。 令$\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta\\ z=\cos\varphi\end{cases}$，则

$\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$，$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$，由

此得到$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{3}{2}\pi$。

10. 提示：将$xyz-$坐标系保持原点不动旋转成$x'y'z'-$坐标系，使z'轴上的单位

向量为$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，则球面$\Sigma$不变，面积元$dS$也不变。设球面$\Sigma$上一

点(x,y,z)的新坐标为(x',y',z')，则$ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}z'$，于是

$$\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z')dS 。$$

计算这一曲面积分，令$x'=\sin\varphi\cos\theta$，$y'=\sin\varphi\sin\theta$，$z'=\cos\varphi$。

11．需要 100 小时. 提示：设在时刻t雪堆的体积为$V(t)$，雪堆的侧面积为$S(t)$，

则$V(t)=\frac{1}{4}\pi h^3(t)$，$S(t)=\frac{13}{12}\pi h^2(t)$。由$\frac{dV}{dt}=-\frac{9}{10}S(t)$，得到$\frac{dh}{dt}=-\frac{13}{10}$，再由

$h(0)=130$，得到$h(100)=0$。

第 2 节

1.（1） 2；（2） $-\frac{14}{15}$；（3） -2π；

（4）当$a=e^2$时，$I=-\frac{1}{2}(7+e^4)$；当$a=e^{-2}$时，$I=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$，其他情况下，

$I=-2+\left(\frac{1-ae^2}{\ln a+2}+\frac{1-ae^{-2}}{\ln a-2}\right)\ln a$ ；

（5）13；

（6）$-\sqrt{2}\pi a^2$. 提示：以 $z=a-x$ 代入积分，得到

$\int\limits_L ydx+zdy+xdz=\int\limits_{L_{xy}}(y-x)dx+(a-x)dy$，其中 L_{xy} 为 L 在 xy 平面上的投影曲线（椭圆）$2x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向。

（7）$2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha)$. 提示：以 $y=x\tan\alpha$ 代入积分，得到

$\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=(1-\tan\alpha)\int\limits_{L_{zx}}xdz-zdx$，其中 L_{zx} 为 L 在 zx 平面上的投影曲线（椭圆）$z^2+x^2\sec^2\alpha=1$，取顺时针方向。

2. 提示：$\left|I_R\right|\le\dfrac{8\pi}{R^2}$。

3．$-\dfrac{8}{15}$。

4.（1）$24h^3$；

（2）$\dfrac{\pi}{4}abc^2$. 提示：设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $dzdx=\cos\beta\, dS$ 与 $dxdy=\cos\gamma\, dS$，得到 $dzdx=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\dfrac{c^2y}{b^2z}dxdy$，于是

$\iint\limits_\Sigma yzdzdx=\iint\limits_\Sigma \dfrac{c^2}{b^2}y^2dxdy=\iint\limits_D \dfrac{c^2}{b^2}y^2dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right.\right\}$。

（3）0. 提示：取 Σ 的参数表示 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 4$。

（4）$-\dfrac{68}{3}\pi$. 提示：设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由

$dydz=\cos\alpha\, dS$ 与 $dxdy=\cos\gamma\, dS$，得到 $dydz=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=2xdxdy$，于是

$\iint\limits_\Sigma zxdydz=\iint\limits_\Sigma 2x^2zdxdy=-\iint\limits_D 2x^2(4-x^2-y^2)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2\le 1\right.\right\}$。

（5）$\dfrac{1}{2}$；（6）$\dfrac{1}{2}\pi h^2(h^2+10)$. 提示：由对称性，$\iint\limits_\Sigma x^2dydz=0$，$\iint\limits_\Sigma y^2dzdx=0$。

（7）$2\pi e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$；

(8) $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$；

(9) $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$。

第 3 节

1.（1）$-\frac{140}{3}$；（2）0；（3）0；（4）$\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$；（5）$\frac{8}{3}$；（6）$(2+\frac{\pi}{2})a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$；

（7）π．提示：设积分 $I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，先证明 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0$，再将积分路径换成椭圆 $4x^2+y^2=1$，即 $x=\frac{1}{2}\cos t,\ y=\sin t,\ t:0\to 2\pi$。

（8）π．提示：设积分 $I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，先证明 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0$，再将积分路径换成椭圆 $x^2+4y^2=1$，即 $x=\cos t,\ y=\frac{1}{2}\sin t,\ t:0\to 2\pi$。

（9）2π．提示：设积分 $I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，先证明 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0$，再将积分路径换成圆 L_r：$x^2+y^2=r^2$，即 $x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ t:0\to 2\pi$；于是得到 $I=\int_0^{2\pi}e^{r\cos t}\cos(r\sin t)dt$，令 $r\to 0$，即得到 $I=2\pi$。

2．（1）$\frac{3}{8}\pi a^2$；（2）$\frac{1}{6}a^2$；（3）$3\pi a^2$。

3．（1）0；（2）$\int_1^2[\phi(t)-\varphi(t)]dt$；（3）9。

4．$x^2\sin y+y^2\sin x$。

5．$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$。

6．$Q(x,y)=x^2+2y-1$。

7．$\lambda=-1$．提示：利用 $\frac{\partial\left[2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\right]}{\partial x}$。

9.（1）$3a^4$；（2）1；（3）$-\frac{1}{2}\pi h^4$；（4）$2\pi R^3$；（5）$2\pi a^2(e^{2a}-1)$；（6）$-\frac{\pi}{2}$；

（7）$-\frac{3}{2}\pi a^3$．提示：原式 $=\iint_{\Sigma}xdydz+\frac{1}{a}(a+z)^2dxdy$；

（8）(i) 4π. 提示：设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{r^3}\right)}{\partial x}=\dfrac{r^2-3x^2}{r^5}$，

$\dfrac{\partial\left(\dfrac{y}{r^3}\right)}{\partial y}=\dfrac{r^2-3y^2}{r^5}$，$\dfrac{\partial\left(\dfrac{z}{r^3}\right)}{\partial z}=\dfrac{r^2-3z^2}{r^5}$。设$\Sigma'=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$，方向为外侧，取其参数表示为$\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，$(\varphi,\theta)\in D'=\{0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le2\pi\}$，

则$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{\Sigma'}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D'}\sin\varphi d\varphi d\theta$；

(ii) 2π.

提示：设$\Sigma'=\{(x,y,z)\Big|\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\le1,z=0\}-\{(x,y,z)\big|x^2+y^2<\varepsilon^2,z=0\}$，方向为下侧，$\Sigma''=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2,z\ge0\}$，方向为下侧。取$\Sigma''$的参数表示为$\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，$(\varphi,\theta)\in D''=\{0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},0\le\theta\le2\pi\}$，则由

$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'+\Sigma''}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=0$，得到$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=$

$\iint\limits_{-\Sigma''}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D''}\sin\varphi d\varphi d\theta$。

11．（1） 0 ；（2） 0。

12．（1） $-\sqrt{3}\pi a^2$ ；（2） 2π ；（3） $-2\pi a(a+h)$ ；（4） $-\dfrac{9}{2}$ ；（5） $\dfrac{1}{3}h^3$ ；（6） -96。

13．提示：$\int\limits_L xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_D(f(y)+\dfrac{1}{f(x)})dxdy=\iint\limits_D(f(x)+\dfrac{1}{f(x)})dxdy$。

14．提示：$\int\limits_{\partial D}\dfrac{F(xy)}{y}dy=\iint\limits_D f(xy)dxdy$，再作变量代换$\begin{cases}u=xy\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$。

15．提示：设$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\boldsymbol{l}=(a,b,c)$，则$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=$

$\dfrac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。注意$\iint\limits_{\Sigma}\cos\alpha dS=\iint\limits_{\Sigma}dydz=0$，$\iint\limits_{\Sigma}\cos\beta dS=\iint\limits_{\Sigma}dzdx=0$，$\iint\limits_{\Sigma}\cos\gamma dS=\iint\limits_{\Sigma}dxdy=0$。

16．提示：设$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{r}\|}=$

$\dfrac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

18．提示：$\dfrac{1}{2}\int\limits_{L}\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy=$

$\iint\limits_{\Sigma}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=S$。

第 4 节

1.（1） 0；（2） $(\sin y-\cos x)dx\wedge dy$；（3） $(x+6)dx\wedge dy\wedge dz$。

2． 0。

3． 0。

4． $\omega=-(\int a_3(y)dy)dx-(\int a_1(z)dz)dy-(\int a_2(x)dx)dz$。

第 5 节

1.（1） $\mathrm{grad}f=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x+20y-15z)$；

（2） $\mathrm{grad}f=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$，

$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=6x+40y-30z)$；

（3） $\mathrm{grad}f=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=(x^2+y^2+z^2)^{-1}(6x+40y-30z)$。

2． $\dfrac{3}{8}\pi$。

3.（1） $f(r)=cr^{-3}$；（2） $f(r)=c_1r^{-1}+c_2$。

4．$\dfrac{3\boldsymbol{c}}{2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}$。

5．(1) 0；(2) -2π。

6．$\operatorname{rot}\boldsymbol{r}(M)=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{r}$ 在 M 点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度为 $\dfrac{1}{3}$。

8．$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$(x,y,z)\neq\boldsymbol{0}$。

10．$U(x,y)=\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$。

11．$V(x,y)=-U(x,y)=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}+C$。

12．$V(x,y)=-U(x,y)=-xyz(x+y+z)+C$。

14．提示：由 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{\tau},y)-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{\tau},x)$，得到

$$\int_C\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}ds=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx。$$

15．提示：$\Delta(F^p)=$

$$pF^{p-4}[(uv_x-vu_x)^2+(uv_y-vu_y)^2]+p(p-1)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]。$$

16．提示：$\iiint\limits_B\nabla g\cdot\mathbf{F}dxdydz=\iiint\limits_B\nabla\cdot(g\mathbf{F})dxdydz-\iiint\limits_B g\nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz$

$$=\iint\limits_{\partial B}g\mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{S}-\iiint\limits_B g\nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz。$$

17．提示：$0=\int\limits_{\partial D}-u\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+u\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=\iint\limits_D\left[(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2+u(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})\right]$。

18．(1) 提示：$\iint\limits_\Sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\iint\limits_\Sigma[\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos(\boldsymbol{n},z)]dS$

$$=\iint\limits_\Sigma\frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy。$$

(2) 提示：$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$，$\dfrac{\partial u}{\partial n}=(\operatorname{grad}u)\cdot\boldsymbol{n}$，于是 $\dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma\left(u\dfrac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS=$ $\dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，其中 $P=\dfrac{(x-x_0)u+r^2u_x}{r^3}$，$Q=\dfrac{(y-y_0)u+r^2u_y}{r^3}$，$R=\dfrac{(z-z_0)u+r^2u_z}{r^3}$，满足 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$。取以 (x_0,y_0,z_0) 为中心，$\delta>0$ 为半径的球面 S_0，使得 $S_0\subset\Omega$，并取 $\boldsymbol{n}$ 为 S_0 的单位外法向量，然后在 Σ 与 S_0 所围的区域上应用 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

注意 $r=\delta$ 为常数，$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=1$ 与 $\iint\limits_{S_0}\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=0$，令 $\delta\to 0$。