第九章

第 1 节

1．（1） $S=\frac{3}{4}$．（2）发散．（3） $S=\frac{1}{4}$．（4） $S=\frac{1}{2}$．（5）发散．（6） $S=3\frac{9}{20}$．

（7） $S=-\sqrt{2}+1$．提示：$S_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$．

（8） $S=1$．提示：设$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$，则$3S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{3^k}$，再两式相减.

（9） $S=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}$．提示：由$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}$，利用 Euler 公式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取实部.

2．（1） $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$．（2） $(-\infty,0)$．（3） $\left(-1,1\right]$．

4． $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{1}{6}$．提示： $x_n=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$．

5．(1) $S_n=\frac{4}{3}a_n{}^3$，其中$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$．　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}$．

第 2 节

1．（1） $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\frac{1}{2}$， $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$．（2） $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=+\infty$， $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0$．

（3） $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$， $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$．（4） $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（5） $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=5$， $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-5$．

第 3 节

1．（1）收敛.（2）发散.（3）发散.（4）收敛.（5）收敛.（6）收敛.
（7）发散.（8）发散.（9）收敛.（10）收敛.（11）收敛.（12）收敛.
（13）发散.（14）收敛.（15）收敛.（16）收敛.（17）收敛.

3．(1) $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a$，所以当$a>1$时，级数收敛，当$0<a<1$时，级数发散；

当$a=1$， $x_n=\frac{1}{n+1}$，级数发散.

(2) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 3>1$，级数收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 2<1$，级数发散.

4．(1) 收敛. (2) 发散. (3) 收敛.

8．提示：$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$；反例：$x_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$.

9．(1) $S=A-f(1)$. (2) 提示: $0\le f'(n)<f'(\xi)=f(n)-f(n-1)$.

10．提示: $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

11．提示: 证明数列$\{nx_{n+1}\}$单调增加，于是存在$\alpha>0$，使得$nx_{n+1}\ge\alpha$.

12．提示: 设$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，令$y_1=\sqrt{S_1}$，$y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}$ $(n=2,3,4,\cdots)$.

13．提示: 利用不等式$\frac{x_n}{S_n{}^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$.

14. 提示: 注意 Fibonacci 数列的性质 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 与 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt5+1}{2}<2$

(见例 2.4.4). 由 D'Alembert 判别法可知级数收敛. 设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$，则$2S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}$，

两式相加得到 $3S=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{2^n}=4S-a_1-a_2$.

第 4 节

1．（1）发散.（2）条件收敛.（3）当$x\ne0$时条件收敛；当$x=0$时绝对收敛.
（4）发散.（5）条件收敛.（6）条件收敛.

（7）当$x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$时绝对收敛；当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$时条件收敛；其他情况下发散.

（8）当$x=\frac{k\pi}{2}$时绝对收敛；设$x\ne\frac{k\pi}{2}$，当 $p>1$ 绝对收敛，当 $p\le1$时发散.

（9）当$|x|<2$时绝对收敛，当$|x|\ge2$时发散.（10）条件收敛.

（11）当$|x|<1$时绝对收敛；

当 $x=1$ 时, $\begin{cases} p>1 或 p=1,\ q>1 & 绝对收敛 \\ 其他情况 & 发散 \end{cases}$;

当 $x=-1$ 时, $\begin{cases} p>1 或 p=1,\ q>1 & 绝对收敛 \\ p=1, q\le 1 或 0<p<1 或 p=0, q>0 & 条件收敛 \\ 其他情况 & 发散 \end{cases}$;

当 $|x|>1$ 时发散.

（12）当 $a>1$ 时绝对收敛; 当 $0<a\le 1$ 时条件收敛.

3. 提示: 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{n}{2}x_n < x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \cdots + x_n \to 0$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛. 反例: $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 不一定收敛. 反例: $x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n=2k \\ \frac{1}{k^2} & n=2k-1 \end{cases}$.

7. 收敛; 提示: $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha > 0$.

8. 提示: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)$, 利用 Abel 判别法.

9. 提示: 令 $a_n = x_n, b_n = 1$, 则 $B_k = k$, 利用 Abel 变换得到

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = nx_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(x_{k+1}-x_k).$$

10. 提示: 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, $\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \forall p\in \mathrm{N}^{+}$: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} y_k\right| < \varepsilon$. 由于 $\sum_{n=2}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛, 所以收敛, 于是可知 $\{x_n\}$ 有界. 设 $\sum_{n=2}^{\infty}|x_{n+1}-x_n| = A$, $|x_n|\le B$, 令 $B_k = y_{n+1}+y_{n+2}+\cdots+y_{n+k}$, 利用 Abel 变换得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k\right| = \left|x_p B_p - \sum_{k=n+1}^{n+p}(x_{k+1}-x_k)B_k\right| < (A+B)\varepsilon.$$

11. 提示: 首先有 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 于是 $f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$.

12．提示： 反证法. 令 $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，则由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$ 收敛.

13. 提示：由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，可知数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的；同时存在 $\beta>\alpha>0$，当 n 充分大时，成立 $\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\alpha}$，这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的，于是 $n^{\alpha}x_n\le A$，从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零.

14. $\frac{3}{2}\ln 2$. 提示： 设 $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$c_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则有 $S_{3n}=b_{4n}-b_n-\frac{1}{2}c_n+2\ln 2$. 再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\ln 2$.

第 5 节

1．(1) 收敛. (2) 发散. (3) 收敛. (4) 收敛. (5) 当 $x>1$ 时收敛，当 $x\le 1$ 时发散. (6) 收敛. (7) 当 $|x|<2$ 时收敛，当 $|x|\ge 2$ 时发散. (8) 收敛. (9) 收敛.

(10) 当 $\min(p,2q)>1$ 时收敛，当 $\min(p,2q)\le 1$ 时发散.

2. (1) $\frac{1}{2}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$.

(2) $\frac{1}{3}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}$.

(3) $\frac{2}{3}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)}$.

3. 提示： 设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则 $0<\alpha_n<\frac{1}{2}{x_n}^2$.

4. 提示： 设 $\tan(\frac{\pi}{4}+a_n)=1+\alpha_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2$.

5．提示：利用$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$发散到0的充分必要条件是$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$发散到$-\infty$.

6. 提示：$\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}=\frac{\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}$.