第五章

第 1 节

5．提示：令$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，在$[a,b]$上对$F(x)$应用 Rolle 定理.

7．提示：利用 Lagrange 中值定理$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})$，其中$\xi\in(\frac{a}{n+1},\frac{a}{n})$；注：也可利用$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$.

9．提示：证明$f(x)$在每一点的导数为零.

12．（4）提示：令$f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\geq 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0\,.$$

（5）提示: 令$f(x)=x^p+(1-x)^p$，证明$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$取到最小值$\frac{1}{2^{p-1}}$.

（6）提示：令$f(x)=\sin x\tan x-x^2$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 则$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x$，

$f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2$. 显然$f''(x)>0$. 由$f'(0)=0$，可知$f'(x)>0$.

再由$f(0)=0$，得到$f(x)>0$.

14．$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$；提示：$\{x_n\}$单调减少，且当$n\geq 2$时，$x_n<\frac{2}{3}$.

15．（2）提示：在$[0,\xi]$上对$e^{-\lambda x}[f(x)-x]$应用 Rolle 定理.

17．提示：令$g(x)=x^2$，对$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理.

18．提示：令$f(x)=\frac{1}{x}e^x$，$g(x)=\frac{1}{x}$，对$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理.

19．提示：令$g(x)=\frac{1}{x}$，对$\frac{1}{x}f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上应用 Cauchy 中值定理.

20．提示：对$x\in[1,2]$，$e^{-x}f(x)$显然是有界的；对$x>2$，有

$$\left|e^{-x}f(x)\right|<\left|e^{-x}(f(x)-f(1))\right|+e^{-2}\left|f(1)\right|<\frac{2\left|f(x)-f(1)\right|}{e^{x}-e^{1}}+e^{-2}\left|f(1)\right|$$，其中

$\dfrac{\left|f(x)-f(1)\right|}{e^{x}-e^{1}}=2e^{-\xi}\left|f'(\xi)\right|$是有界的.

21．提示：注意$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$有界，并考虑$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}$.

22．提示：视$\dfrac{f(x)}{x^n}$为$\dfrac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}$，应用 Cauchy 中值定理，并逐次进行下去.

24．提示：利用数学归纳法，注意

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f\left((\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n x_n\right)\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right)+\lambda_n f(x_n).$$

26．提示：利用$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x_0)}{x}+\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\dfrac{x-x_0}{x}$.

27．提示：在区间$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$上对$g(x)=f(x)-f(x-\dfrac{b-a}{2})$应用 Lagrange 中值定理.

第 2 节

2．(1) 2；(2) $-\dfrac{3}{5}$；(3) $-\dfrac{1}{8}$；(4) $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$；(5) 1；(6) $\dfrac{1}{3}$；(7) 1；(8) 1；

(9) $\dfrac{1}{2}$；(10) 0；(11) 1；(12) $\dfrac{2}{3}$；(13) $\dfrac{1}{2}$；(14) $+\infty$；(15) 2；(16) $e^{-\frac{2}{\pi}}$；

(17) 1；(18) $\dfrac{1}{2}$；(19) 1；(20) e^{-1}.

4．5； 提示：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2}$.

5．连续；提示：$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

6．提示：$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\ln x=\lim\limits_{x\to0+}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]=0$.

7．提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$.

第 3 节

1．提示：$\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.

2．提示：由 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+\circ(h^{n+1})$，

得到 $\theta\cdot\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\circ(1)$.

第 4 节

1．（1）$1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{14}{81}x^3+\dfrac{35}{243}x^4+\circ(x^4)$；

（2）$\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\dfrac{\cos\alpha}{2!}x^2+\dfrac{\sin\alpha}{3!}x^3+\dfrac{\cos\alpha}{4!}x^4+\circ(x^4)$；

（3）$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-\dfrac{\sqrt{2}}{32}x^2-\dfrac{13\sqrt{2}}{384}x^3+\circ(x^3)$；

（4）$1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+\circ(x^4)$；

（5）$x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\circ(x^5)$；

（6）$-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{45}x^6+\circ(x^6)$；

（7）$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{720}x^4+\circ(x^4)$

（8）$-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{180}x^4+\circ(x^4)$；

（9）$\dfrac{1}{6}x^2+x^3+\circ(x^3)$.

2．（1）$-1-3(x-1)^2-2(x-1)^3$；

（2）$1+\dfrac{1}{e}(x-e)-\dfrac{1}{2e^2}(x-e)^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n+\circ\left((x-e)^n\right)$；

（3）$(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\circ\left((x-1)^n\right)$；

（4）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots+\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^n$

$+\circ\left((x-e)^n\right)$；

（5）$\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n$

$+\circ\left((x-2)^n\right)$.

6．（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\ln^2 a$；（3）0；（4）$\frac{2}{5}$；（5）$\frac{1}{2}$；（6）$\frac{1}{3}$；（7）$-\frac{1}{4}$；（8）$\frac{1}{6}$.

8．（1）$y=x-1, x=-1$；（2）$y=0$；（3）$y=\pm\sqrt{6}(x-\frac{2}{3})$；（4）$y=x+3, x=0$；

（5）不存在；（6）$x=1, x=-1$；（7）$y=x+\pi, y=x$；（8）$y=x$；

（9）$y=\pi$；（10）$y=-\frac{1}{12}x$；（11）$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}$，$x=0$；（12）$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}$，$x=0$。

9．提示：分别对极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}}$应用 Stolz 定理.

10．提示：设$f(x_0)=\frac{1}{4}$，则$f'(x_0)=0$，以$x=0$和$x=1$代入$f(x)$在点x_0的 Taylor 公式$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，得到$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2]\le 1$.

11．提示：任取$x_0\in[0,1]$，以$x=0$和$x=1$代入$f(x)$在点x_0的 Taylor 公式得到

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2，$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2，$$

两式相减，得到

$$|f'(x_0)|\le|f(0)|+|f(1)|+[{x_0}^2+(1-x_0)^2].$$

12．提示：设$f(x_0)=-1$，则$f'(x_0)=0$，以$x=0$和$x=1$代入$f(x)$在点x_0的 Taylor 公式$f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，得到$\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge 8$.

13．提示：设$|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，若$x_0=a$或$b$，则结论自然成立；

设$a < x_0 < b$，以$x=a$和$x=b$代入$f(x)$在点x_0的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

得到$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|\left[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2\right]$.

第 5 节

1．（1）极值点：$x=-1,2$； 单调区间：$(-\infty,-1]$增加，$[-1,2]$减少，$[2,+\infty)$增加.

（2）无极值点； 单调区间：$(-\infty,+\infty)$增加.

（3）极值点：$x=\frac{1}{e^2}$； 单调区间： $(0,\frac{1}{e^2}]$减少，$[\frac{1}{e^2},+\infty)$增加.

（4）n是偶数时，极值点：$x=0,n$；单调区间：$(-\infty,0]$减少，$[0,n]$增加，$[n,+\infty)$减少. n是奇数时，极值点：$x=n$；单调区间：$(-\infty,n]$增加，$[n,+\infty)$减少.

（5）极值点：$x=-1,5$； 单调区间：$(-\infty,-1]$增加，$[-1,2)$减少，$(2,5]$减少，$[5,+\infty)$增加.

（6）极值点：$x=1\pm\sqrt{2}$； 单调区间：$(-\infty,1-\sqrt{2}]$增加，$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$减少，$[1+\sqrt{2},+\infty)$增加.

（7）极值点：$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$； 单调区间：$(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}]$增加，$[-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$减少，$(0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$减少，$[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$增加.

（8）极值点：$x=0$；单调区间：$[0,+\infty)$增加，$(-1,0]$减少.

（9）极值点：$x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\quad k\in Z$；单调区间：$[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$减少，$[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$增加，$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$减少，$[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$增加，$[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$减少，$[2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$增加.

（10）没有极值点. 单调区间：$(-\infty,+\infty)$减少.

（11）极值点：$x=-\frac{1}{2}\ln 2$；单调区间：$(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$ 减少，$[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$ 增加.

（12）极值点：$x=1$；单调区间：$(-\infty,1]$ 增加，$[1,+\infty)$ 减少.

（13）极值点：$x=\frac{12}{5}$；单调区间：$(-\infty,\frac{12}{5}]$ 增加，$[\frac{12}{5},+\infty)$ 减少.

（14）极值点：$x=e$；单调区间：$(0,e]$ 增加，$[e,+\infty)$ 减少.

2．（1）拐点：$(1,2)$．保凸区间：$(-\infty,1]$ 下凸，$[1,+\infty)$ 上凸.

（2）拐点：$(k\pi,k\pi)\quad k\in \mathrm{Z}$．保凸区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上凸，$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 下凸.

（3）没有拐点．保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸.

（4）拐点：$(2,\frac{2}{e^2})$．保凸区间：$(-\infty,2]$ 上凸，$[2,+\infty)$ 下凸.

（5）拐点：$\left(5-3\sqrt{3},\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1-\sqrt{3})\right)$，$\left(5+3\sqrt{3},\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1+\sqrt{3})\right)$．保凸区间：$(-\infty,5-3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5-3\sqrt{3},2)$ 上凸，$(2,5+3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5+3\sqrt{3},+\infty)$ 上凸.

（6）拐点：$(-1,1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})\right)$．保凸区间：$(-\infty,-1]$ 下凸，$[-1,2-\sqrt{3}]$ 上凸，$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 下凸，$[2+\sqrt{3},+\infty)$ 上凸.

（7）没有拐点．保凸区间：$(-1,+\infty)$ 下凸.

（8）拐点：$(0,0)$．保凸区间：$(-\infty,0]$ 下凸，$[0,+\infty)$ 上凸.

（9）没有拐点．保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸.

（10）拐点：$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$．保凸区间：$(-\infty,-1]$ 上凸，$[-1,1]$ 下凸，$[1,+\infty)$ 上凸.

（11）拐点：$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$．保凸区间：$(-\infty,\frac{1}{2}]$ 下凸，$[\frac{1}{2},+\infty)$ 上凸.

（12）没有拐点．保凸区间：$[1,+\infty)$ 上凸.

4. 当 n 是奇数时，$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点；当 n 是偶数，$\varphi(a)>0$ 时，$x=a$ 是

$f(x)$ 的极小值点，当 n 是偶数，$\varphi(a)<0$ 时，$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

5. 当 n 是奇数时，$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点；当 n 是偶数， $f^{(n)}(a)>0$ 时，$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点，当 n 是偶数， $f^{(n)}(a)<0$ 时，$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

6. $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sigma}$.

7. 拐点：$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{4}\right)$. 切线方程：$3\sqrt{3}x-8y-1=0$，$3\sqrt{3}x+8y-5=0$.

9. (1) $n=14$. (2) $n=3$.

10．提示：由函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的单调增加性，得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

11. 提示：设 $f(x)=e^x-\left(x^2-2ax+1\right)$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=e^x-2x+2a$. 证明 $f'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 取最小值，最小值为 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$.

12. 提示: 设 $f(x)=\arctan x-kx$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k$.

当 $k\ge 1$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$. 所以在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)<0$；

当 $0<k<1$ 时，由 $f'(0)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，可知 $f(x)=0$ 必有正实根.

13. $\xi=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

15. $S_{\max}=\dfrac{ah}{4}$.

16. 矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{2}b$.

17. $\theta=2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

18. $R:H=b:a$.

19. 提示：参考例题 5.5.5。