第十五章

第 1 节

1．(1) $\frac{\pi}{4}$；(2) $\ln\frac{2e}{1+e}$。

2．提示：用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-} f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\forall x\in[a,b]$：$|f(x,y)-\phi(x)|<\varepsilon$；参考定理 10.2.7（Dini 定理）的证明方法。

3．(1) $\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$；(2) $\pi\arcsin a$。

4．(1) $2ye^{-y^5}-e^{-y^3}-\int_y^{y^2}x^2e^{-x^2y}dx$；(2) $\frac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$

(3) $F(t)=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xtdx$

$+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)dy$。

5．$I''(y)=3f(y)+2yf'(y)$。

6．$F''(y)=\begin{cases}2f(y), & x\in(a,b),\\ 0, & x\,\overline{\in}\,(a,b).\end{cases}$

8．(1) $\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$；(2) 0；(3) $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$。

11．显然 $I(y)$ 在 $y\neq 0$ 的点是连续的，因为 $I(0)=0$，而 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$，$\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(0)\neq 0$，所以 $I(y)$ 在 $y=0$ 点不连续.

提示：$\forall\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使得当 $0<x<\eta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则 $|\int_0^\eta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$。对固定的 $\eta>0$，取 $\delta>0$，使得当 $0<|y|<\delta$ 时，$|\int_\eta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是 $|\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\varepsilon$。分别令 $y\to 0+$ 与 $y\to 0-$，由 $\lim\limits_{y\to 0+}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)$，$\lim\limits_{y\to 0-}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=-\frac{\pi}{2}f(0)$ 和 ε 的任意

性，即可得到 $\lim\limits_{y\to 0+} I(y)=\dfrac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0-} I(y)=-\dfrac{\pi}{2}f(0)$。

第 2 节

1．(3) 提示：由分部积分法

$$\int_A^{+\infty} x\sin x^4\cos\alpha x dx=-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}d\cos x^4$$

$$=-\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{4x^2}\Bigg|_A^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx,$$

当 $A\to+\infty$ 时，上述三式关于 α 在 $[a,b]$ 上一致趋于 0。

2．(1) 提示：取 $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$，

$$\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}dx\ge\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+(\frac{3n\pi}{4})^2\right)}。$$

(2) 提示：作变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin tdt$，取 $\alpha_n=2-\dfrac{1}{n}$，

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin tdt\ge\frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}}。$$

3．提示：$\displaystyle\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt+\int_0^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$。

4． (1) 一致收敛；
(2) (i) 一致收敛；(ii) 非一致收敛；
(3) (i) 一致收敛；(ii) 非一致收敛；
(4) (i) 一致收敛；(ii) 非一致收敛。

5．提示：证明积分关于 α 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛。

6．$(0,2)$．提示：证明积分关于 y 在 $(0,2)$ 内闭一致收敛。

7．提示：证明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

8．提示：证明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]_t' dx$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛。

9．$\ln\dfrac{b}{a}$。

10．$\arctan\dfrac{b}{p}-\arctan\dfrac{a}{p}$。

11．$\dfrac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi$。

12．$\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right]$。

13．提示：

$$\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}dx$$
$$=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx=[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a},$$

其中ξ_1在aA'与bA'之间，ξ_2在aA''与bA''之间，这是利用了积分中值定理。令$A'\to 0$，$A''\to+\infty$即得结论。

14．(1) 提示：令$\dfrac{c}{y}=t$，则$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}\dfrac{c}{t^2}dt$，于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}(1+\frac{c}{t^2})dt=\frac{e^{-2c}}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(t-\frac{c}{t})^2}d(t-\frac{c}{t}),$$

再令$t-\dfrac{c}{t}=x$，得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{e^{-2c}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx。$$

(2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$。

15．$\dfrac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|\beta|}$。

第 3 节

1．(1) $\dfrac{\pi}{8}$；(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$；(3) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$；(4) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}}$；

(5) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$；(6) $\dfrac{256}{1155}$；(7) $\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$；(8) $\dfrac{1}{n}B\left(\dfrac{p}{n},q\right)$。

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\Gamma(1)=1$。

4．提示：易知$\Gamma(1)=\Gamma(2)$，所以存在$x_0\in(1,2)$，使得$\Gamma'(x_0)=0$。由习题 3 的方

法得到$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln^2 xdx>0$，于是在$(x_0,+\infty)$上$\Gamma'(s)>0$，因此 $\Gamma(s)$在$(x_0,+\infty)$上单调增加。再由$\Gamma(n+1)=n!\to+\infty$即得结论。

5．$\ln\sqrt{2\pi}$。提示：利用$\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$及余元公式。

6．$p<1$时收敛，此时$I=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)$。

7．当$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$时积分收敛，此时$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(\frac{1}{\gamma})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma})$。

提示：令$\begin{cases}x=u^{\frac{2}{\alpha}}\\y=v^{\frac{2}{\beta}}\\z=w^{\frac{2}{\gamma}}\end{cases}$ 与$\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\v=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$，得到

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr,$$

对其中积分$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$，令$r^2=t$。

8．$I=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$.

提示 将积分化为$I=(p-1)\iiint\limits_{\Omega}x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}dxdydz$，其中$\Omega$是由平面$x=0$，$y=0$，$z=0$与$x+y+z=1$所围的区域。再令$\begin{cases}x=u^2\\y=v^2\\z=w^2\end{cases}$ 与$\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\v=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$，得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr。$$

9．提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{-\alpha}xdx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{-\alpha+1}{2}\right)$

$$=\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}。$$

10．提示：作变量代换$t=\tan\frac{\varphi}{2}$，则

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2}\text{，}$$

再作变量代换$\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\,t=\tan\theta$，将它变为

$$\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta d\theta=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}B\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

再利用余元公式即得结论。

11．提示：作变量代换 $t=hu$，得

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^1(1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\text{，}$$

再作变量代换$u=\sin\theta$，右式变为

$$h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta=\frac{h}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)=\frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h\text{。}$$