复旦大学数学科学学院

2010～2011 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 A》（上）试题（答案）

1．（本题满分 48 分，每小题 6 分）（1）$-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；（2）$a=c=1$，$b=0$；

（3）1；（4）$f(n)=n^n e^{-n}$ 为极大值；（5）$-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+C$；（6）2；（7）3；

（8）$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$c_1$，$c_2$ 是不全为零的的常数。

2．（本题满分 8 分）$a=b=e$。

3．（本题满分 8 分）256。

4．（本题满分 8 分）$\lambda=-\dfrac{4}{13}$，$\mu=-\dfrac{9}{26}$。

5．（本题满分 9 分）

当 $a\neq 1$ 时（b 可为任意常数），方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1},\quad x_2=\frac{a-2b-3}{a-1},\quad x_3=\frac{b+1}{a-1},\quad x_4=0。$$

当 $a=1$，$b=-1$ 时，方程组有无穷多解。通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 c_1，c_2 为任意常数。

当 $a=1$，$b\neq -1$ 时，方程组无解。

6．（本题满分 9 分）（1）4；

（2）证明：该曲线与直线 $x=\pi$，$y=0$ 所围平面图形的面积为

$$A=\int_0^{\pi}\left(\int_0^x\sqrt{\sin t}\ dt\right)dx。$$

注意当 $0\le x\le \pi$ 时，$\sqrt{\sin x}\ge \sin x$，于是

$$\int_0^x\sqrt{\sin t}\ dt\ge\int_0^x \sin t\ dt=1-\cos x。$$

（装订线内不要答题）

于是

$$A \ge \int_0^{\pi} (1-\cos x)dx = \pi \text{ 。}$$

7.（本题满分 10 分）证明：（1）对于 $x \in [a,b]$，由于 $\omega(x)$ 非负，则显然成立

$$a\omega(x) \le x\omega(x) \le b\omega(x) ,$$

由 $\int_a^b \omega(x)\,dx = 1$，上式在 $[a,b]$ 上取定积分便得结论。

（2）取 $x_0 = \int_a^b x\omega(x)\,dx$，则 $x_0 \in [a,b]$。由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x) \ge 0$，由 Taylor 公式可得

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) ,\quad x \in [a,b] \text{。}$$

因此

$$\omega(x)f(x) \ge f(x_0)\omega(x) + f'(x_0)[x\omega(x) - x_0\omega(x)] ,\quad x \in [a,b] \text{。}$$

取积分便得

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx \ge f(x_0)\int_a^b \omega(x)dx + f'(x_0)\left[\int_a^b x\omega(x)dx - x_0\int_a^b \omega(x)dx\right]$$

$$= f(x_0) = f\left[\int_a^b x\omega(x)dx\right].$$