复旦大学

2009～2010 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：__高等数学 A（上）___ 课程代码：____________________

开课院系：______________________________ 考试形式：闭卷

姓 名：________________ 学 号：________________ 专 业：________________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

一.（本题共 20 分，每小题 5 分）

1.求 $y = x\sin^2 2x$ 的二阶导数 ；

2.计算 $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx$ ；

3.计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$；

4.求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan 2x}\ln(1+t^2)dt}{x^2\sin x}$.

二.（本题共 20 分，每小题 5 分）

1.求矩阵的秩； $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -8 & -4 \\ 1 & 4 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

2.设矩阵 A,B 满足 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 B；

3.设 A 是一个 3×4 的矩阵，$\mathrm{rank}(A)=2$，方程组 $Ax=b$ 有三个特解

$x^{(1)}=(1,2,-1,2)^{T}, x^{(2)}=(2,-1,1,3)^{T}, x^{(3)}=(3,2,-2,1)^{T}$,

试求方程组 $Ax=b$ 的通解。

4.设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ 为正交阵，求 a,b,c,d,e,f 。

三. （本题 10 分）求 $f(t)=\int_0^{\pi}|x-t|\sin x dx$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最大值和最小值。

四. （本题 10 分）设有方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+ax_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=b \\ 3x_1+2x_2-5x_3+2x_4=1 \end{cases}$ ，问 a,b 为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时请求出其通解。

五.（本题 10 分）设 A 是一个实三阶方阵，其特征值为 $1, -1, 2$，证明: A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(I + 2A - A^2)$

六.（本题 10 分）设有一个质量为 m 的均匀细棒放在 xoy 平面的第一象限，细棒两端的坐标分别是 $(2, 0), (0, 2)$，有一个单位质量的质点位于坐标原点，求细棒对这质点的引力。

七.（本题 12 分）设线性空间 $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}$

（1）记 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，说明 β_1,β_2,β_3 是 V 的一组基；

（2）记 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求出基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

（3）定义线性变换 $\mathcal{A}$ 为：$\mathcal{A}(\alpha_1)=\beta_1+\beta_2$，$\mathcal{A}(\alpha_2)=\beta_2+\beta_3$，$\mathcal{A}(\alpha_3)=\beta_3$，求出 $\mathcal{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的表示矩阵。

八.（本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，满足

$$f(0)=-1,\ f(1)=0,\ f'(0)=0\text{。}$$

（1）设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$，计算 $g''(x)$；

（2）证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2(x-1)}{6}f'''(\xi)$，$x\in(0,1)$。