

复旦大学数学科学学院

2013~2014学年第二学期期末考试试卷

□ A 卷

课程名称: 高等数学A(下) 课程代码: MATH20002

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

题目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1、(本题满分48分, 每小题6分) 计算以下各题

(1). 求 $u = x \sin(x + y)$ 的一阶及二阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。

(2). 求椭球面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 $(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 处的切平面。

(装订线内不要答题)

(3). 求三重积分 $\iiint_V xyz dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及 $x = 0, y = 0, z = 0$ 所界区域。

(4). 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2^n} x^n$ 的收敛半径和收敛域。

(5). 解微分方程 $xy' - y = x^3$.

(6). 将函数 $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$ 展开成正弦级数。

(7). 计算 $\int \int_{\Sigma} (x + yz) dydz + (y + zx) dzdx + z dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧。

(8). 求 $\text{grad} f(r)$, 其中 f 为可微函数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2、计算题（本题满分8分） 已知函数 $Z = x^2 - y^2 + 2$ ，求 Z 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值。

3、计算题（本题满分8分） 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ，计算二重积分 $\iint_D \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} dx dy$ 。

4、计算题（本题满分10分） 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数。

5、计算题（本题满分10分） 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

求 $f^{(n)}(0)$.

6、计算题（本题满分8分） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上二阶连续可导， $z = f(e^x \cos y)$ 。

(1). 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

(2). 若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} (4z + 8e^x \cos y)$ ，且 $f(0) = f'(0) = 0$ ，试求出 $f(u)$ 的表达式。

7、证明题（本题满分8分） 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n, b_n < \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明

(1) $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛。