复旦大学数学科学学院

2011～2012 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 A》（上）试题（答案）

1.（本题满分 48 分，每小题 6 分）（1） $y+2x-1=0$；（2） $\sqrt[3]{e}$；

（3） $a=1$， $b=0$， $c=-3$；（4） $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$；（5） $4\sqrt{2}$；（6） $\frac{5}{2}$；

（7） $-\frac{9}{5}$；（8） $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。

2.（本题满分 8 分） $\frac{\sqrt{5}}{4}$。

3.（本题满分 8 分）即求曲线 $y=\begin{cases} 0, & x\ge 0, \\ \frac{x}{1+x^2}, & x<0 \end{cases}$ 与两条直线 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $x=1$ 所围平面图形的面积。答案： $\frac{1}{2}\ln 2$。

4.（本题满分 9 分）

当 $\lambda\ne 1$ 且 $\lambda\ne 10$ 时，方程组有唯一解；

当 $\lambda=10$ 时，方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解。

5.（本题满分 10 分）（1） $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，1，-1。对应于 2 的特征向量为 $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，对应于 1 的特征向量为 $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应于 -1 的特征向量为 $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$（$c$ 为任意非零常数）；

（2） $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。

（3） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。

（装订线内不要答题）

6.（本题满分 9 分）证明：由于 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$，则当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)\le 0$，因此 f 在 $x=1$ 点取 $[0,+\infty)$ 上的最大值。于是

$$f(x)\le\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt\le\int_0^1(t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}，\quad x\ge 0。$$

7.（本题满分 8 分）证明：显然 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$。由 Lagrange 中值定理得

$$f(b)-f(a)=\frac{\xi-1}{\xi^2}(b-a)>0，\quad 1<a<\xi<b。$$

为证明右面的不等式，考察函数 $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$。易知 $g'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$，令 $g'(x)=0$ 得驻点 $x=2$。因为当 $1<x<2$ 时 $g'(x)>0$；当 $x>2$ 时 $g'(x)<0$，所以 $g(2)=\dfrac{1}{4}$ 为极大值，且它是 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一极值，因此也是最大值，即

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2}\le\frac{1}{4}，\quad x\in(1,+\infty)。$$

于是

$$f(b)-f(a)=\frac{\xi-1}{\xi^2}(b-a)\le\frac{1}{4}(b-a)。$$