姓 名：________ 学 号：________ 专 业：________

（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2017～2018 学年第二学期期末考试试卷

A 卷解答

1. （本题共 40 分，每小题 5 分）计算下列各题

(1) 设 $z=(1+xy)^2\ln(1+xy)$，求 z'_x 。

解： $z'_x=(1+xy)y(2\ln(1+xy)+1)$。

(2) 解方程 $y'-\dfrac{2}{x}y=2x^2$ 。

解： 可得 $(x^{-2}y)'=2$，所以通解 $y=x^2(2x+c)$。

(3) 求椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1$ 上一点，使得在这点的椭球面切平面与 $x-y+2x=4$ 平行。

解： 切平面法向为 $(2x,2y,z)$，可设 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{2y}{-1}=\dfrac{z}{2}=t$，

代入方程，$\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{4t^2}{2}=1$，所以 $t=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，所求点为 $\pm(\sqrt{\dfrac{1}{10}},-\sqrt{\dfrac{1}{10}},2\sqrt{\dfrac{2}{5}})$。

(4) 求函数 $u=x^3+2y^2-3x-12y$ 的极值。

解：先求驻点， $u'_x=3x^2-3, u'_y=4y-12$，得驻点（1, 3），（−1, 3），

由 $u''_{xx}=6x, u''_{yy}=4, u'_{xy}=0$，在点（1, 3），$\Delta=u''_{xx}u''_{yy}-{u''_{xy}}^2=24>0$，且 $u''_{xx}=6>0$，

所以函数在点（1, 3）有极小值 $u_{\min}=-20$，在点（−1, 3），$\Delta=u''_{xx}u''_{yy}-{u''_{xy}}^2=-24<0$，

所以函数在点（−1, 3）没有极值。

(5) 计算 $\int_L (x+y)ds$，其中曲线 $L: x^2+y^2=2x$。

解： 原式$=\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta+\sin\theta)d\theta=2\pi$ 。

(6) 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 Ω 由 $z=3-x^2-y^2$ 和 $z=0$ 所围。

解： 原式$=\int_0^3 z^2dz\iint_{\Omega_z}dxdy=\pi\int_0^3 z^2(3-z)dz=\dfrac{27}{4}\pi$ 。

(7) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2^n}(x-2)^{2n}$的收敛半径与收敛区间。

解： $\rho=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln^2(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{\ln^2 n}{2^n}}=\frac{1}{2}$，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2^n}t^n$收敛半径$R=2$，

当$t=-2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^2 n$发散，

当 $t=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2 n$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2^n}t^n$ 的收敛区间为 $(-2,2)$，即

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2^n}(x-2)^{2n}$的收敛区间为$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$。

(8)求球面$x^2+y^2+z^2=4$被平面$x+y+z=0$所截的上半部分在xoy面上的投影区域的面积。

解：设有向曲面Σ是平面$x+y+z=0$被球面$x^2+y^2+z^2=4$所围部分，方向取上侧，

则所求面积 $A=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}dxdy+2\pi=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos\gamma dS+2\pi$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{3}}dS+2\pi=\frac{1}{2}\frac{4\pi}{\sqrt{3}}+2\pi=(\frac{2}{\sqrt{3}}+2)\pi。$$

2.（本题共 10 分）设$y=x\ln x$是方程$x^2y''+p(x)y'+y=0$的一个解,

（1）求$p(x)$的表达式;

（2）求解方程$x^2y''+p(x)y'+y=x\ln x$。

解:（1）将$y=x\ln x$代入方程, 可得 $p(x)=-x$。

（2）设$t=\ln x$, 方程$x^2y''+p(x)y'+y=x\ln x$化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=te^t,$$

其特解为 $y=\frac{1}{6}t^3e^t$ ，通解为 $y=(c_1+c_2t)e^t+\frac{1}{6}t^3e^t$ ，

原方程通解为 $y=(c_1+c_2\ln x)x+\frac{1}{6}x\ln^3 x$。

3.（本题共 10 分）设 $x=e^{u+v}, y=e^{u-v}$，试将方程 $x^2 z''_{xx}+y^2 z''_{yy}+xz'_x+yz'_y=0$ 从化为关于自变量 u,v 的方程（假设 $z=z(x,y)$ 有连续的二阶偏导数）。

解：由链式公式，$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x=\dfrac{1}{2x}(z'_u+z'_v)$，$z'_y=z'_u u'_y+z'_v v'_y=\dfrac{1}{2y}(z'_u-z'_v)$，

$$\begin{aligned}z''_{xx}&=\frac{1}{2x}(z''_{uu}u'_x+z''_{uv}v'_x+z''_{vu}u'_x+z''_{vv}v'_x)-\frac{1}{2x^2}(z'_u+z'_v)\\&=\frac{1}{4x^2}(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv})-\frac{1}{2x^2}(z'_u+z'_v),\end{aligned}$$

$$z''_{yy}=\frac{1}{2y}(z''_{uu}u'_y+z''_{uv}v'_y-z''_{vu}u'_y-z''_{vv}v'_y)-\frac{1}{2y^2}(z'_u-z'_v)$$

$$=\frac{1}{4y^2}(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv})-\frac{1}{2y^2}(z'_u-z'_v),$$

所以 $$x^2 z''_{xx}+y^2 z''_{yy}+xz'_x+yz'_y=\frac{1}{2}z''_{uu}+\frac{1}{2}z''_{vv},$$

即原方程化为 $z''_{uu}+z''_{vv}=0$。

4.（本题共 10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2yz)dydz+(y^2+2zx)dzdx+(z^2+2xy)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解：设有向曲面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$，取下侧。

由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2+2yz)dydz+(y^2+2zx)dzdx+(z^2+2xy)dxdy=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\frac{\pi}{2}$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+2yz)dydz+(y^2+2zx)dzdx+(z^2+2xy)dxdy=0,$$

于是 $$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2yz)dydz+(y^2+2zx)dzdx+(z^2+2xy)dxdy=\frac{\pi}{2}。$$

5.（本题共 10 分）计算 $\int_L(e^x\cos y+y^2)dx+(2xy-e^x\sin y)dy$，其中有向曲线 L 是 $y=x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段。

解：记 $P(x,y)=e^x\cos y+y^2, Q(x,y)=2xy-e^x\sin y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以曲线积分与路径无关，记点 B 的坐标为 $(1,0)$，就有

$$\text{原式} = \int_{OB} (e^x \cos y + y^2)dx + (2xy - e^x \sin y)dy + \int_{BA} (e^x \cos y + y^2)dx + (2xy - e^x \sin y)dy$$

$$= \int_0^1 e^x dx \quad + \int_0^1 (2y - e\sin y)dy = e\cos 1 \text{。}$$

6.（本题共 10 分）求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n$ 的和函数。

解：其收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $[-1, 1]$。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4},\ x \in [-1,1),$$

而 $\quad -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x}\ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \to \frac{3}{4}\ (x \to 1-0)$，

$$\text{所以和函数为} S(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 0, & x = 0 \\ \frac{3}{4}, & x = 1 \end{cases} \text{。}$$

7.（本题共 10 分）证明 $\frac{3}{2}\pi < \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x+2y-2z+5}\,dxdydz < 3\pi$，

其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$。

证：由 Cauchy 不等式，$(x+2y-2z)^2 \le (1+4+4)\,(x^2+y^2+z^2) \le 9$，

可得 $\qquad \sqrt{x+2y-2z+5} \ge \sqrt{2}$，

所以 $\qquad \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x+2y-2z+5}\,dxdydz \ge \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi > \frac{3}{2}\pi$，

另一方面，由 Cauchy 不等式，可得

$$\left(\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x+2y-2z+5}\ dxdydz\right)^2 \le \iiint\limits_{\Omega} 1\,dxdydz \iiint\limits_{\Omega} (x+2y-2z+5)dxdydz = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 5 < 9\pi^2,$$

所以 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x+2y-2z+5}dxdydz<3\pi$。